２０２３年度　東京大学　数学（理）
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

東京大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説する。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムで解析が出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに６題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、この解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、普通の人である著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

第　１　問

(1) 正の整数 k に対し,

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$$

とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

この式を見て、 まず最初、$y=|\sin(x^2)|$のグラフを考えるだろう 。さらに、定積分の上端、下端の $\sqrt{\ }$ の数式を見て、 「x^2 のままでは解けない。 $x^2=t$ と置いてみよう」という発想に導かれる。取りあえず、 $y=|\sin(x^2)|$ のグラフの概形図を描いてみる。

図１のようなグラフになるだろう。

最初は、 $\boxed{f(k)} < \sin(x^2) < \boxed{f(k+1)}$ となるような関数 $f(x)$ を見つけ出そうとしたが、それなら x^2 じゃなく、 x のままで問題を作るかな、と思って、 $x^2=t$ と置いてみることにした。

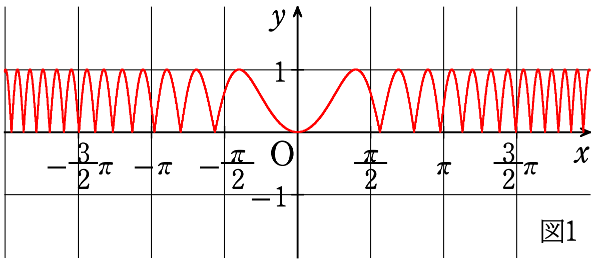


図1

［証明］ $x^2=t$ とおく。 $x>0$ のとき $x=\sqrt{t}$ となる。

さらに、$2xdx=dt$ より $dx=\dfrac{1}{2x}dt=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$

また、$x:\sqrt{k\pi}\to\sqrt{(k+1)\pi}$ 　のとき　$t:k\pi\to(k+1)\pi$ なので

$$A_k=\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(x^2)|dx=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}dt$$

（ｉ） $k=2m$ $(m=1,2,3,\cdots)$のとき

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}dt=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

ここで $k\pi<t<(k+1)\pi$ の場合は $\dfrac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}<\dfrac{1}{2\sqrt{t}}<\dfrac{1}{2\sqrt{k\pi}}$ となり、

これより $\dfrac{\sin t}{2\sqrt{(k+1)\pi}}<\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}<\dfrac{\sin t}{2\sqrt{k\pi}}$ となる。

すなわち $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{(k+1)\pi}}dt<\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt<\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{k\pi}}dt$

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt<\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt<\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt$$

ここで $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt=\left[-\cos t\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}=-\cos(2m+1)\pi+\cos 2m\pi=2$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}<A_k<\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$ となる。

（ii） $k=2m-1$ $(m=1,2,3,\cdots)$のとき

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}dt=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{-\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

$-\sin t>0$ に注意し、（ｉ）と同様にして

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{-\sin t}{2\sqrt{(k+1)\pi}}dt<\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{-\sin t}{2\sqrt{t}}dt<\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{-\sin t}{2\sqrt{k\pi}}dt$ となる。

さらに $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-\sin t)dt=\left[\cos t\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\cos 2m\pi-\cos(2m-1)\pi=2$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}<A_k<\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$ となる。

以上より、正の整数 k に対し $\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}<A_k<\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ となる。　　　　［証明終］

（2） $B_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}|\sin(x^2)|dx$ の形を見て、（1）の答えを使うのだろうと、いろいろ考えていたら次の公式を思い出した。これを使って B_n の式変形を考える。

定積分の公式 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

［解］

$$\sqrt{n}\,B_n=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}|\sin(x^2)|dx$$

$$=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}|\sin(x^2)|dx+\int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}}|\sin(x^2)|dx+\int_{\sqrt{(n+2)\pi}}^{\sqrt{(n+3)\pi}}|\sin(x^2)|dx+\cdots+\int_{\sqrt{(n+n-1)\pi}}^{\sqrt{(n+n)\pi}}|\sin(x^2)|dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{(n+k)\pi}^{(n+k+1)\pi}|\sin(x^2)|dx$$

$$B_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{(n+k)\pi}^{(n+k+1)\pi}|\sin(x^2)|dx$$

（1）より $\dfrac{1}{\sqrt{(n+k+1)\pi}}<\displaystyle\int_{(n+k)\pi}^{(n+k+1)\pi}|\sin(x^2)|dx<\dfrac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k+1)\pi}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{(n+k)\pi}^{(n+k+1)\pi}|\sin(x^2)|dx<\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}$$

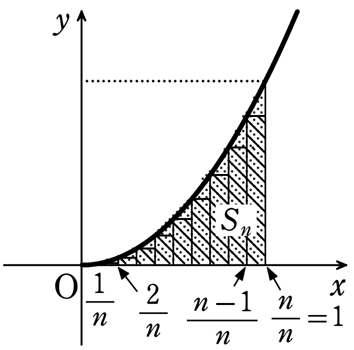
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k+1)\pi}}<\qquad B_n\qquad<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}\cdots\cdots①$$

－－－

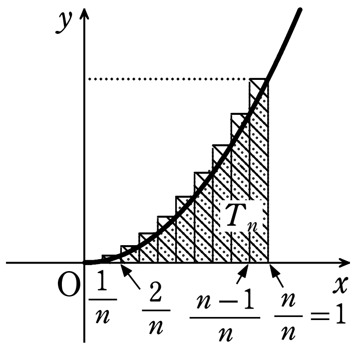
※ここで区分求積法の公式を示そう。

区分求積法 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

　これは内側を分割した場合（下の左図）と外側を分割した場合（下の右図）とは最終的に同じ面積になる、という公式である。（下図は数研出版「数学Ⅲ」からの抜粋）



$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$



$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

－－－

これより①の左辺は

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k+1)\pi}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\pi}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}}$$

次に①の右辺は

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\pi}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}}$$

よって①の不等式において、はさみうちの原理から $B_n=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}}$ ……（答）となる。

次にこの問題をPythonを使って分析する。ここでは $\frac{\sin t}{2\sqrt{(k+1)\pi}}<\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}<\frac{\sin t}{2\sqrt{k\pi}}$ の不等式を図に描くことにする。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_01_NO1－－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title,x_label = "x", y_label = "y"):
   ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
   ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
   ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
   ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
   ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
   ax.grid()
   ax.axhline(0, color = "black")
   ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
title1 = "Tokyo University 2023 Math qu.1 NO1"
cnt1=10
descartes(ax, [0,cnt1*np.pi], [0, 3],title1)

t=np.linspace(np.pi,cnt1*np.pi,1000)
y=abs(np.sin(t))/2*np.sqrt(t)
ax.plot(t ,y , color = "red")
```

$y=\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}$　　$k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$

但し、$k=1,2,3,\cdots$

※グラフの色は赤

```
for k in range(1,cnt1):
   t=np.linspace(k*np.pi,(k+1)*np.pi,1000)
   y=abs(np.sin(t))/2*np.sqrt(k*np.pi)
   ax.plot(t ,y , color = "blue")

   t=np.linspace(k*np.pi,(k+1)*np.pi,1000)
   y=abs(np.sin(t))/2*np.sqrt((k+1)*np.pi)
   ax.plot(t ,y , color = "green")

plt.show()
```

$y=\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}\quad k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$

但し、$k=1,2,3,\cdots,cnt1$

※グラフの色は青

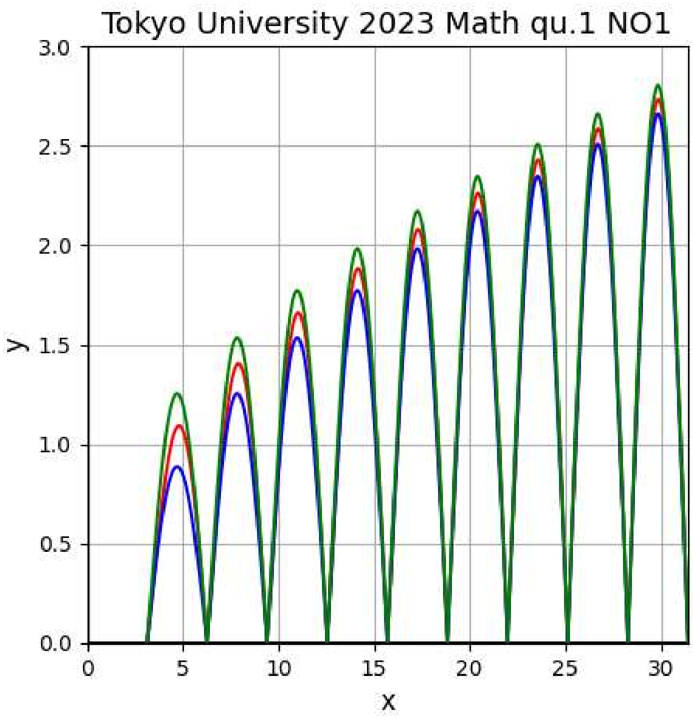
$y=\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\quad k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$

但し、$k=1,2,3,\cdots,cnt1$

※グラフの色は緑

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－－

［出力］



不等式 $\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}<\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}<\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$ を視覚的に納得出来る図と思うが、どうだろうか。

以上で第 1 問の解説は終わる。

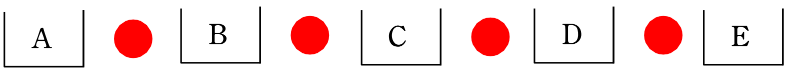
第　2　問

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

（1）問題自体は理解できる。シンプルな問題であるが、シンプルなものほど解くのが難しい、というのが数学の入試問題の定説である。これはどうだろうか。
内容としては、次の図のような意味である。



このA～Eまでのかごのなかに、白玉と黒玉、合わせて８個が入れればよく、さらにB、C、Dには少なくとも１個の玉が入れなければならない、ということである。これから思い出されるのは、重複組合せである。以下にこれに関する教科書の内容を載せる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ｂ（数研出版）－－－－－－－－－－－

研究　重複を許して取る組合せ

組合せ $_nC_r$ では，異なる n 個のものから，異なる r 個を取り出した。
ここでは，同じものを繰り返し取ってもよいとして，r 個取る組合せの総数について考えてみよう。

例 1　3 個の文字 a，b，c から重複を許して 5 個取る組合せの総数
例えば，a を 2 個，b を 2 個，c を 1 個取った組合せを aabbc と書くことにする。ここで，5 個の ○ と 2 個の仕切り ｜ の順列を考え，問題にしている組合せとの間に，次のような対応をつける。

aabbc　⟷　○○｜○○｜○
abbbc　⟷　○｜○○○｜○
aaacc　⟷　○○○｜｜○○
bbbbb　⟷　｜○○○○○｜
…………

このようにすると，a，b，c から重複を許して 5 個取る組合せと，5 個の ○ と 2 個の ｜ の順列が，1 つずつ対応する。
よって，求める組合せの総数は，7 個の場所から ○ をおく 5 個を

選ぶ方法の総数に等しく，次の値になる。

$${}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21 \qquad \boxed{終}$$

【補足】この総数は，同じものを含む順列の総数を考えて，次のように計算することもできる。

$$\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21$$

一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組合せの総数は，上の例と同様に考えると，r 個の ○ と $(n-1)$ 個の ｜ の順列の総数に等しく，${}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ここまで「数学Ｂ（数研出版）」からの引用－－－

この教科書では使っていないが、${}_nH_r$ という記号を使って重複組合せを公式化しているのが多いので、それを使った公式を以下に示す。

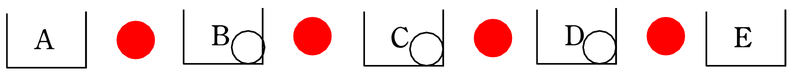
重複組合せ

異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組合せの総数は，

$${}_nH_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

これを使って（１）を解いてみる。

［解］次の図は、A～Eには、白玉と黒玉の色を考慮しない８個の玉を入れるかごであり、B、C、Dには予め１個ずつ玉が入っているとする。



ここで残り５個の玉を５つのかごに入れる入れ方は、${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5=126$

これは赤４個、白黒合わせて８個が入るパターンなので、場合の数は、異なる赤４個と異なる白黒８個を入れるので、$4!\times 8!\times 128$ となる。

よって、どの赤玉も隣り合わない確率は $p=\dfrac{4!\times 8!\times 128}{12!}=\dfrac{14}{55}$ ……（答）

（２）（１）と同じように簡単に求められないか、といろいろ考えたけど、なかなか思いつかない。むしろ力任せに解いた方が、面倒くさいけど単純作業になって時間的に早いかな、と思い以下の解法にした。Excellentな解き方ではないが、こんな馬鹿な解き方でも答が出せるんだ、と笑ってほしい。

［解］５つのかごに白玉５個と黒玉３個の入れ方を考え、さらにどの黒玉も隣り合わない場合の数をまず考える。これは、どの赤玉も隣り合わなく、かつ、どの黒玉も隣り合わない場合の数になる。

（ｉ）

A	B	C	D	E
5	1	1	1	0

のとき

A	B	C	D	E
黒3 白2	白1	白1	白1	0

$1\times 4=4$

A	B	C	D	E
黒2 白3	黒1	白1	白1	0

${}_3H_2\times\dfrac{4!}{2!}=72$

A	B	C	D	E
黒1 白4	黒1	黒1	白1	0

$5\times\dfrac{4!}{2!}=60$

A	B	C	D	E
黒0 白5	黒1	黒1	黒1	0

$1\times\dfrac{4!}{3!}=4$

さらに

A	B	C	D	E
0	1	1	1	5

も同じ数になるので、$(4+72+60+4)\times2=280$……①

（ii）

A	B	C	D	E
4	2	1	1	0

のとき

A	B	C	D	E
黒2 白2	黒1 白1	白1	白1	0

$3\times2\times\dfrac{4!}{2!}=72$

A	B	C	D	E
黒2 白2	黒0 白2	黒1	白1	0

$3\times4!=72$

A	B	C	D	E
黒1 白3	黒1 白1	黒1	白1	0

$4\times2\times4!=192$

A	B	C	D	E
黒1 白3	黒0 白2	黒1	黒1	0

$4\times\dfrac{4!}{2!}=48$

A	B	C	D	E
白4	黒1 白1	黒1	黒1	0

$2\times\dfrac{4!}{2!}=24$

さらに

A	B	C	D	E
0	2	1	1	4

も同じ数になるので、$(72+72+192+48+24)\times2=816$……②

（iii）

A	B	C	D	E
4	1	1	1	1

のとき

A	B	C	D	E
黒2 白2	黒1	白1	白1	白1

$3\times\dfrac{5!}{3!}=60$

A	B	C	D	E
黒1 白3	黒1	黒1	白1	白1

$4\times\dfrac{5!}{2!2!}=120$

A	B	C	D	E
黒0 白4	黒1	黒1	黒1	白1

$\dfrac{5!}{3!}=20$

これより　$60+120+20=200$……③

(iv)

A	B	C	D	E
3	3	1	1	0

のとき

A	B	C	D	E
黒2 白1	黒0 白3	白1	白1	0

$1\times2\times\dfrac{4!}{2!}=36$

A	B	C	D	E
黒2 白1	黒1 白2	白1	白1	0

$3\times3\times\dfrac{4!}{2!}=108$

A	B	C	D	E
黒1 白2	黒1 白2	黒1	白1	0

$3\times\dfrac{4!}{2!}=36$

A	B	C	D	E
黒1 白2	黒0 白3	黒1	黒1	0

$1\times4!=24$

さらに

A	B	C	D	E
0	3	1	1	3

も同じ数になるので、$(36+108+36+24)\times2=408$……④

(v)

A	B	C	D	E
3	2	2	1	0

のとき

A	B	C	D	E
黒2 白1	黒1 白1	黒0 白2	白1	0

$1\times2\times4!=48$

A	B	C	D	E
黒2 白1	黒0 白2	黒0 白2	黒1	0

$1\times\dfrac{4!}{2!}=12$

A	B	C	D	E
黒1 白2	黒1 白1	黒1 白1	白1	0

$3\times2\times2\times4!=144$

A	B	C	D	E
黒1 白2	黒1 白1	黒0 白2	黒1	0

$3\times2\times4!=144$

A	B	C	D	E
黒0 白3	黒1 白1	黒1 白1	黒1	0

$2\times2\times\dfrac{4!}{2!}=48$

さらに

A	B	C	D	E
0	2	2	1	3

も同じ数になるので、$(48+12+144+144+48)\times2=792$……⑤

(vi)

A	B	C	D	E
3	2	1	1	1

のとき

A	B	C	D	E
黒2 白1	黒1 白1	白1	白1	白1

$1\times2\times\dfrac{5!}{3!}=40$

A	B	C	D	E
黒2 白1	黒0 白2	黒1	白1	白1

$1\times\dfrac{5!}{2!}=60$

A	B	C	D	E
黒1 白2	黒1 白1	黒1	白1	白1

$3\times2\times\dfrac{5!}{2!}=360$

A	B	C	D	E
黒1 白2	黒0 白2	黒1	黒1	白1

$3\times\dfrac{5!}{2!}=180$

A	B	C	D	E
黒0 白3	黒1 白1	黒1	黒1	白1

$2\times\dfrac{5!}{2!}=120$

A	B	C	D	E
黒0 白3	黒0 白2	黒1	黒1	黒1

$1\times\dfrac{5!}{3!}=20$

これより　$40+60+360+180+120+20=780$……⑥

(vii)

A	B	C	D	E
2	2	2	2	0

のとき

A	B	C	D	E
黒1 白1	黒1 白1	黒1 白1	黒1 白1	0

$2\times2\times2\times\dfrac{4!}{3!}=32$

さらに

A	B	C	D	E
0	2	2	2	2

も同じ数になるので、$32\times2=64$……⑦

(viii)

A	B	C	D	E
2	2	2	1	1

のとき

A	B	C	D	E
黒1 白1	黒1 白1	黒1 白1	白1	白1

$2\times2\times2\times\dfrac{5!}{3!2!}=80$

A	B	C	D	E
黒1 白1	黒1 白1	黒0 白2	黒1	白1

$2\times2\times\dfrac{5!}{2!}=240$

A	B	C	D	E
黒1 白1	黒0 白2	黒0 白2	黒1	黒1

$2\times\dfrac{5!}{2!2!}=60$

これより　$80+240+60=380$……⑧

(ix)

A	B	C	D	E
0	6	1	1	0

のとき

A	B	C	D	E
0	黒3 白3	白1	白1	0

${}_4H_1\times3=4\times3=12$

A	B	C	D	E
0	黒2 白4	黒1	白1	0

${}_3H_3\times3!=10\times6=60$

A	B	C	D	E
0	黒1 白5	黒1	黒1	0

$6\times\dfrac{3!}{2!}=18$

これより　12+60+18=90……⑨

（x）

A	B	C	D	E
0	5	2	1	0

のとき

A	B	C	D	E
0	黒3 白2	黒0 白2	白1	0

$1\times3!=6$

A	B	C	D	E
0	黒2 白3	黒1 白1	白1	0

${}_3H_2\times3!\times2=72$

A	B	C	D	E
0	黒2 白3	黒0 白2	黒1	0

${}_3H_2\times3!=36$

A	B	C	D	E
0	黒1 白4	黒1 白1	黒1	0

$5\times2\times3!=60$

これより　6+72+36+60=174……⑩

（xｉ）

A	B	C	D	E
0	4	3	1	0

のとき

A	B	C	D	E
0	黒2 白2	黒1 白2	白1	0

${}_3H_1\times3\times3!=54$

A	B	C	D	E
0	黒2 白2	黒0 白3	黒1	0

${}_3H_1\times3!=18$

A	B	C	D	E
0	黒1 白3	黒2 白1	白1	0

$4\times1\times3!=24$

A	B	C	D	E
0	黒1 白4	黒1 白2	黒1	0

$4\times3\times3!=72$

A	B	C	D	E
0	黒0 白5	黒2 白1	黒1	0

$1\times3!=6$

これより　54+18+24+72+6=174……⑩

（xⅱ）

A	B	C	D	E
0	4	2	2	0

のとき

A	B	C	D	E
0	黒2 白2	黒1 白1	黒0 白2	0

${}_3H_1\times2\times3!=36$

A	B	C	D	E
0	黒1 白3	黒1 白1	黒1 白1	0

$4\times2\times2\times\dfrac{3!}{2!}=48$

これより　36+48=84……⑪

（xiii）

A	B	C	D	E
0	3	3	2	0

のとき

A	B	C	D	E
0	黒2 白1	黒1 白2	黒0 白2	0

$1\times3\times3!=18$

A	B	C	D	E
0	黒2 白1	黒0 白3	黒1 白1	0

$1\times2\times3!=12$

A	B	C	D	E
0	黒1 白2	黒1 白2	黒1 白1	0

$3\times3\times2\times3!=54$

これより　$18+12+54=84$……⑬

①～⑬より　$280+816+200+408+792+780+64+380+90+174+174+84+84=4326$

これは、黒玉３個、赤玉４個、白玉５個が、どの赤玉も隣り合わなく、かつ、どの黒玉も隣り合わない場所のパターンが4326通りという意味なので、その場所に異なる玉を入れたのが、どの赤玉も隣り合わなく、かつ、どの黒玉も隣り合わない事象の数になるので、その確率は

$$\frac{4!\times5!\times3!\times4326}{12!}=\frac{103}{11\times10\times3\times2}$$ となる。

よって、どの赤玉も隣り合わないとき、どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q は

$$q=\frac{103}{11\times10\times3\times2}\div p=\frac{103}{11\times10\times3\times2}\times\frac{55}{14}=\frac{103}{168}$$ ……（答）

条件付き確率

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$ より

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

※タラタラと冗長な答案であるということは自覚している。このような解答を発表する人はいないだろう。しかし、本番の時、格好いい解き方が考えつかなかったら、時間との勝負で力任せに解く、という選択もあるだろう。このときの注意事項は、計算ミスが致命傷になるので、慎重に一歩一歩確認しながら進む、ということに尽きる。

それでは、これをPythonで分析してみる。実際に玉をランダムに並べて、本当に計算通りの結果になるのか、というのが面白いと思うので、以下のようなプログラムを作った。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_02_NO1－－－－－－－－－－－

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title,x_label = ”x”, y_label = ”y”):
   ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
   ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
   ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
```

```
    ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
    ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
    ax.grid()
    ax.axhline(0, color = ”black”)
    ax.axvline(0, color = ”black”)
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)

title1 = ”Tokyo University 2023 Math qu.2 NO1”
descartes(ax, [−1, 1000], [13, 15],title1)
```

座標の縦軸を13から15に設定

```
random.seed(42)
roll_ball_n = 55
total_n = 10
loop_n=1001
```

55回ランダムに玉を並べたら、その中14回はどの赤球も隣り合わない、という検証をするので、roll_ball_nに設定した回数ごとにカウントし、55×10回ごとその平均値を計算し保存する。それを1000回繰り返す。

```
ball_box = [10,10,10,1,1,1,1,100,100,100,100,100]

Flag1=False
cnt1=0
y=[]
yy=[]
```

黒玉の数値を10 、赤球を1 、白玉を100 とする。これは赤赤と並んだ場合、その和は2となり、それ以外は2 とならないので、条件判断がかなり楽になる。

黒玉の数値を10 、赤球を1 、白玉を100 とする。これは赤赤と並んだ場合、その和は2となり、それ以外は2 とならないので、条件判断がかなり楽になる。

```
for ll in range(loop_n):
    for k in range(total_n):
        for i in range(1,roll_ball_n+1):
            random.shuffle(ball_box)
            for j in range(11):
                Flag1=True
                if ball_box[j]+ball_box[j+1] == 2:
                    Flag1=False
                    break
            if Flag1==True:
                cnt1 += 1
        y.append(cnt1)
        cnt1=0
    yy.append(np.mean(y))
```

Flag1が真のときは、赤玉が隣同士になっていないパターンであり、cnt1はその回数をカウントし、55回ごとクリアーしている。

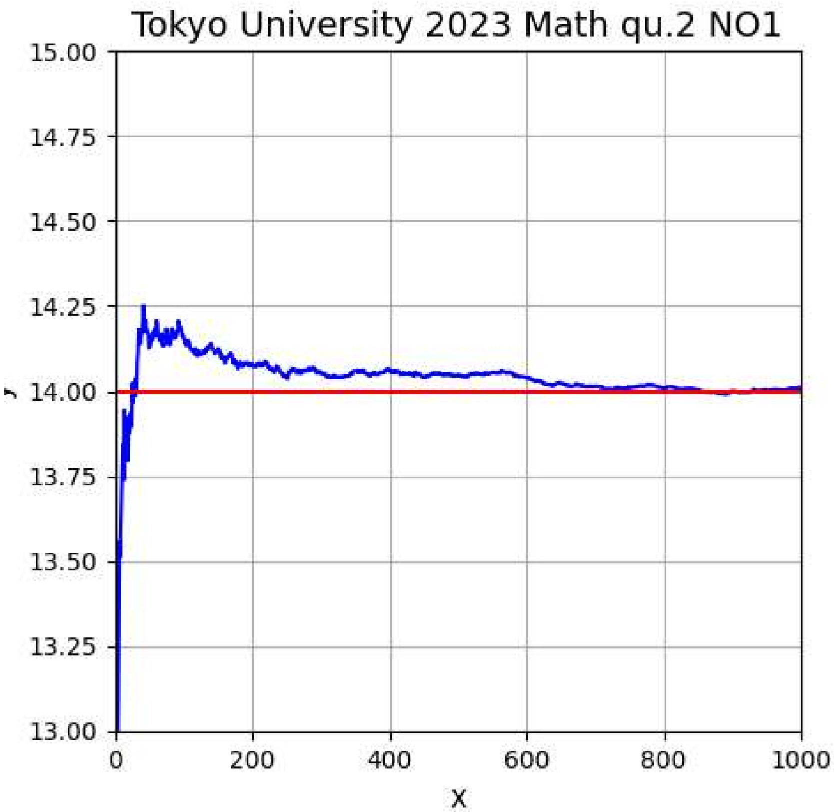
55回を１セットとし、10セットごと赤玉が隣同士になっていなかった回数の平均値をとる。

```
print("yy average=",np.mean(yy))
xx = np.arange(len(yy))
ax.plot(xx ,yy , color = "blue")

xx = np.arange(len(yy))
b = [14]*len(yy)
ax.plot(xx ,b , color ="red")

plt.show()
```

赤玉が隣同士になっていなかった回数（55回中）を青色のグラフで表示する。
14回を赤色の直線で表示する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－－

［出力］　　yy average= 14.03590960217937



※なかなか面白い結果になった。実際に1000×10回、玉をランダムに並べていたら、赤玉が隣り合わないのが55回中14回になる、というのだが、これを実際に玉を使った実験で確かめることはできないだろう。それを、コンピュータで実験した、ということになるだろう。

それでは、ついでにと言っては何であるが、どの赤玉も隣り合わなく、かつ、どの黒玉も隣り合わない確率のグラフも表示してみる。計算上では660回中103回である。

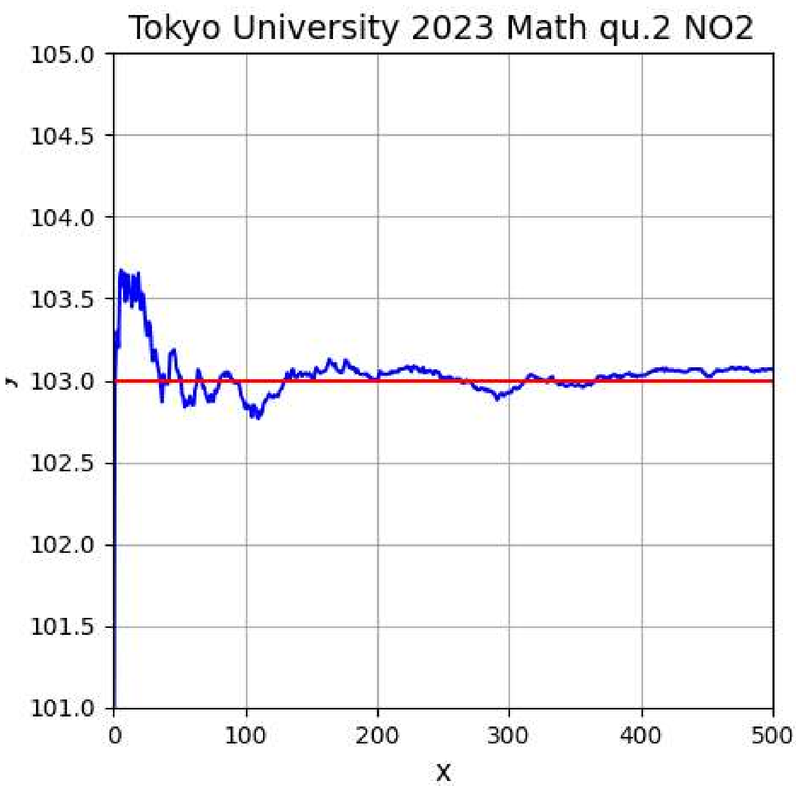
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−tokyo_23_02_NO2−−−−−−−−−−−

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title,x_label = "x", y_label = "y"):
   ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
   ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
   ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
   ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
   ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
   ax.grid()
   ax.axhline(0, color = "black")
   ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)

title1 = "Tokyo University 2023 Math qu.2 NO2"
descartes(ax, [−1, 500], [101, 105],title1)

random.seed(42)
roll_ball_n = 660
total_n = 10
loop_n=501

ball_box = [10,10,10,1,1,1,1,100,100,100,100,100]

Flag1=False
cnt1=0
y=[]
yy=[]

for ll in range(loop_n):
   for k in range(total_n):
      for i in range(1,roll_ball_n+1):
         random.shuffle(ball_box)
         for j in range(11):
            Flag1=True
            if ball_box[j]+ball_box[j+1] == 2 or ball_box[j]+ball_box[j+1] == 20:
```

```
            Flag1=False
            break
        if Flag1==True:
          cnt1 += 1
      y.append(cnt1)
      cnt1=0
  yy.append(np.mean(y))

print("yy average=",np.mean(yy))
xx = np.arange(len(yy))
ax.plot(xx ,yy , color = "blue")

xx = np.arange(len(yy))
b = [103]*len(yy)
ax.plot(xx ,b  , color ="red")

plt.show()
```

――――――――――――――――――――――――python program――――――――――――

［出力］　　　　　　yy average= 103.0298425973949



これも面白い結果である。要するに導いた答えと実験結果は一致した、ということである。

以上で第２問の　解説は終わる。

第　3　問

a を実数とし，座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

(1) C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2) a は (1) で求めた範囲にあるとする。C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする。S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q, R が存在するような a の範囲を求めよ。

（１）問題を読んで概形図を描く（図１）と、要するに放物線と円が $y>x^2$ の領域で接する a の値を求め、それより大きくなる a の値が答えとなる。

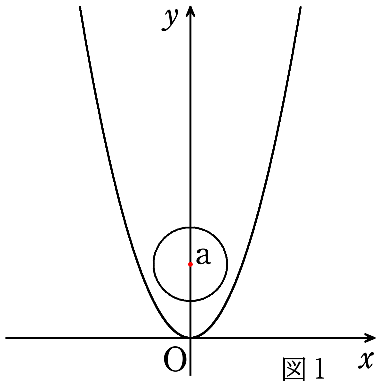


図１

［解］円を $x^2+(y-a)^2=1$……①

放物線を $y=x^2$　……②とおく。

②を①に代入してまとめると

$x^4-(2a-1)x^2+a^2-1=0$ となる。

ここで $x^2=t$ とおくと

$t^2-(2a-1)t+a^2-1=0$ となり、

放物線と円が接するとき　このtに関する２次方程式は重解を持つので判別式D=0となる。

すなわち $D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=-4a+5=0$　これより $a=\dfrac{5}{4}$

よって、図より $a>\dfrac{5}{4}$ ……（答）となる。

（２）これは円の中心を原点に固定し、放物線を a の値によって動かした方が解きやすいだろう。

［解］円Cを $x^2+y^2=1$……①　放物線を $y=x^2-a$……② とおくと（２）の問題文は

「C のうち $x \geqq 0$ かつ $y<0$ を満たす部分を S とする。S 上の点P に対し、点PでのCの接線が放物線 $y=x^2-a$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする。$L_Q=L_R$ となるS上の相異なる２点 Q 、R が存在するような a の範囲を求めよ。」となる。

ここで点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ただし $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < 0$ とおくと

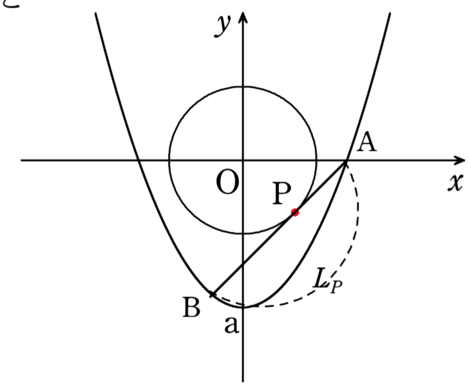
点Pにおける接線の方程式は

$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$……③ となる。

②を③に代入してまとめると

$\sin\theta \cdot x^2 + \cos\theta \cdot x - a\sin\theta - 1 = 0$

この解 α、β とおくと、解と係数の関係より



$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \alpha\beta = \dfrac{-a\sin\theta - 1}{\sin\theta} \end{cases}$$ となる。

円と放物線の交点 をA、Bとおくと、$A(\alpha, \alpha^2-a)$ 、 $B(\beta, \beta^2-a)$ となり

$$L_P^2=AB^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=(\alpha-\beta)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}$$

$$=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\}$$

$$=\left\{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-4\cdot\frac{-a\sin\theta-1}{\sin\theta}\right\}\left\{1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right\}$$

$$=\frac{(4a-1)\sin^2\theta+4\sin\theta+1}{\sin^4\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{4}{\sin^3\theta}+\frac{4a-1}{\sin^2\theta}$$

$t=\dfrac{1}{\sin\theta}$ とおく。 $-1\leqq\sin\theta<0$ なので $t\leqq-1$

$L_P^2=f(t)=t^4+4t^3+(4a-1)t^2$ となる。

ここで、$L_Q=L_R$ となるS上の相異なる２点 Q 、 R が存在する、ということは 、

$y=f(t)\ (t\leqq-1)$ において、 $f(t_1)=f(t_2)$ かつ $t_1\fallingdotseq t_2$ かつ $t_1, t_2\leqq-1$ となる t_1, t_2 が存在することである。

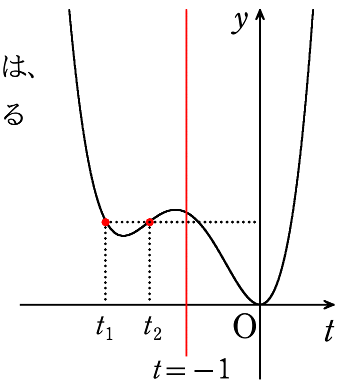
※この考えにたどり着くまでに、かなりの時間を要した。本番では、ここが勝負所かな、と思う。

t について微分すると $f'(t)=4t^3+12t^2+2(4a-1)t=2t\{2t^2+6t+(4a-1)\}$ となり、

$f(-1)=4a-4>1$ ［$\because\ a>\dfrac{5}{4}$ ］、 $f(0)=0$ なので、

$t\leqq-1$で $f(t_1)=f(t_2)$ かつ $t_1\fallingdotseq t_2$ かつ $t_1, t_2\leqq-1$ が存在するには、

左図より 区間 $t\leqq-1$で、 $y=f(t)$ が少なくとも１つ極値が存在する必要がある。



すなわち $f'(t)=0$ となる解が $t\leqq-1$ に存在しなければならない。

ここで、$f'(t)=2t\{2t^2+6t+(4a-1)\}=2t\cdot g(t)$ とおくと、

$g(t)=2t^2+6t+4a-1=0$ の解が区間 $t\leqq-1$ に存在する a の値の範囲が必要十分条件となって答えである。

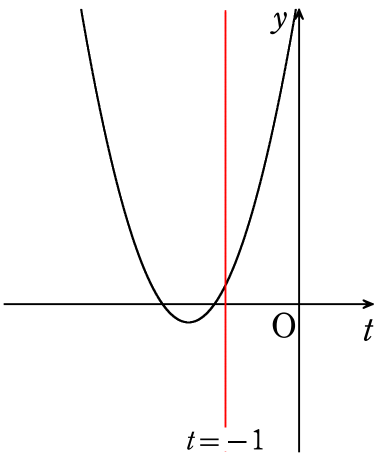
$g(-1)=4a-5>0$ ［$\because\ a>\dfrac{5}{4}$ ］

さらに、 $g(t)=2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+4a-\dfrac{11}{2}$ となって、

頂点 $\left(-\dfrac{3}{2}, 4a-\dfrac{11}{2}\right)$ なので、右図より $4a-\dfrac{11}{2}\leqq0$……④

④より $a\leqq\dfrac{11}{8}$ （１）より $a>\dfrac{5}{4}$

よって、 $\dfrac{5}{4}<a\leqq\dfrac{11}{8}$ ……（答）となる。



それでは、これをPythonで分析してみる。ここでは、 $f(t)=t^4+4t^3+(4a-1)t^2$のグラフを、a の値を変えながら、30本のグラフを同一座標軸上に描いてみる。

―――――――――――――――――――――――tokyo_23_02_NO1―――――――――――

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title,x_label = "x", y_label = "y"):
    ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
    ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
    ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
    ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
    ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
    ax.grid()
    ax.axhline(0, color = "black")
    ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
title1 = "Tokyo University 2023 Math qu.3 NO1"
descartes(ax, [-3,0.1], [-8, 6],title1,x_label="t")

s1=7/8
e1=13/8
cmap = plt.get_cmap('jet')
num = 30
i=0

for a in np.linspace(s1,e1,num):
    i+=1
    ii = i/num
    t=np.linspace(-3,1,1000)
    y=t**4+4*t**3+(4*a-1)*t**2
    ax.plot(t ,y , color = cmap(ii))

a=5/4
y=t**4+4*t**3+(4*a-1)*t**2
ax.plot(t ,y , color = "green")

a=11/8
y=t**4+4*t**3+(4*a-1)*t**2
ax.plot(t ,y , color = "green")
plt.show()
```

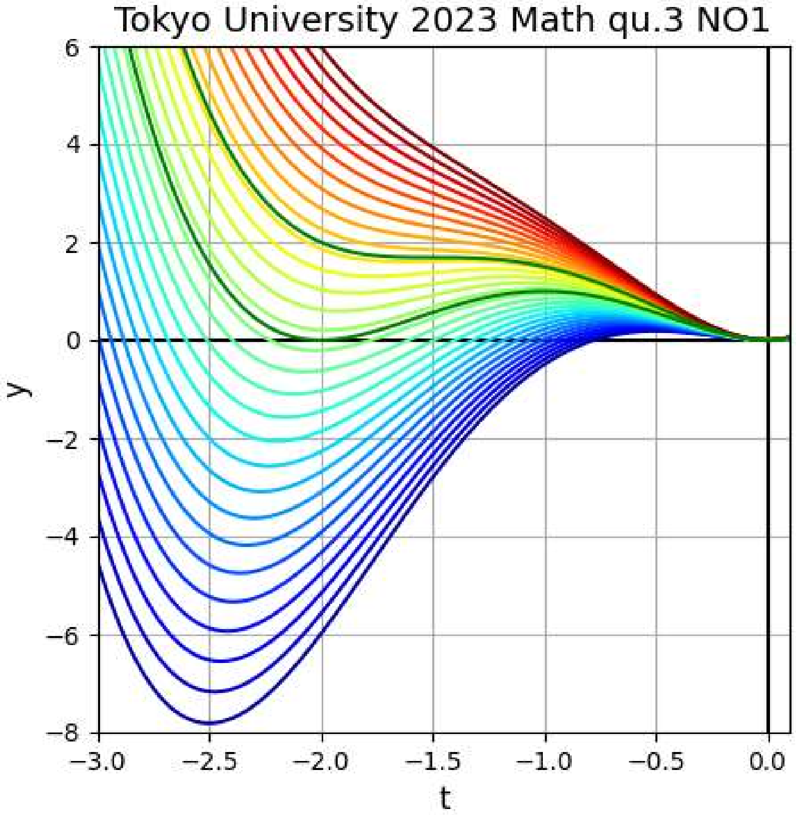
$f(t)=t^4+4t^3+(4a-1)t^2$ のグラフを $a=\frac{7}{8}$ から $a=\frac{13}{8}$ までを30本に分割する。さらに、グラフの色も変化させる。

t の値を-3から1までを1000分割し、その値を$f(t)=t^4+4t^3+(4a-1)t^2$に代入して 描く。

a の値が $\frac{5}{4}$ のときと $\frac{11}{8}$ のときのグラフを緑色のグラフで表示する。
これが a の値の境界になる。

―――――――――――――――――――――――python program―――――――――――

［出力］



なかなか綺麗なグラフである。以上で第３問の解説を終わる。

第　4　問

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(1, 1, 1), C(1, 2, 3) を考える。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

(2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。

空間図形の問題は、空間座標上に正確に描こうと思ったらいけないだろう。大体のイメージだけを掴めばよく、むしろ、概形図がなくても公式だけを適用したら解ける問題が多い。この問題は、まさにそのような問題である。

（1）［解］　$P(a, b, c)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a, b, c)$、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2, 0, 0)$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1, 1, 1)$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1, 2, 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より $2a=0$……①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より $a+b+c=0$……②

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ より $a+2b+3c=0$……③

①、②、③を解くと、$\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$　よって、$P(0, -1, 1)$……（答）となる。

（2）［解］点 H は直線 AB 上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$……① とおける。

直線のベクトル方程式
点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は $\vec{p}=\vec{a}+u\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1.1.1)-(2, 0, 0)=(-1, 1, 1)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2, 0, 0)+u(-1, 1, 1)=(2-u, u, u)$

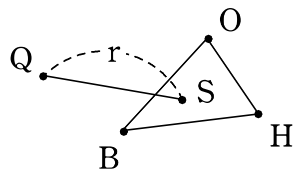
これより $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(2-u, u, u)-(0, -1, 1)=(2-u, u+1, u-1)$

さらに、$AB\perp PH$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=0$ より

$-(2-u)+(u+1)+(u-1)=0$、$u=\dfrac{2}{3}$

これを①に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$……（答）となる。

（3）球面S上さらに $\triangle OHB$ 上の点をSとおくと、
右図の半径 r の範囲を求めよ、という意味になる。
それでは、ここで点Sが$\triangle OHB$ の周および内部にあるという
条件をどうするか。ここで教科書を使って復習をしよう。



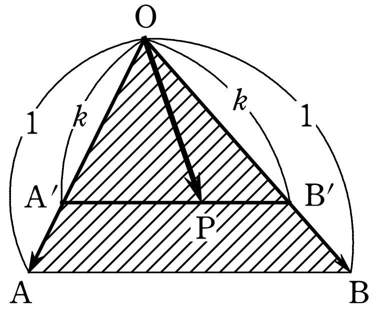
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学B（数研出版）」－－－－－－－－－－－－－－

△OABに対して，点Pが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ 0\leqq s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$$

を満たしながら動くとき，点Pの存在範囲を求めてみよう。

$s+t=k\ (0\leqq k\leqq 1)$ とおく。



[1]　$0<k\leqq 1$ のとき　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで，$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\ s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

よって，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点A′，B′をとると，定数 k に対して，点Pの存在範囲は辺ABに平行な線分A′B′である。

k の値が $0<k\leqq 1$ の範囲で変化すると，線分A′B′上の点は，点Oを除く△OABの周およびその内部を動く。

[2]　$k=0$ のとき，$s=0$，$t=0$ であるから，点Pは点Oに一致する。

したがって，点Pの存在範囲は，△OABの周および内部 である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学B（数研出版）」からの引用－－－－－－－－－

［解］球面S上かつ $\triangle OHB$ 上の点を S とおく。

$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=r$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2=r^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=r^2\cdots\cdots①$$

さらに、点S は $\triangle OHB$ の周および内部にあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}\ (0\leqq s+t\leqq 1\,,\,s\geqq 0\,,\,t\geqq 0)$$

$$=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{2}{3}t+s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

これより　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\dfrac{2}{3}t+s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$=\left(\frac{1}{3}t-\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{2}{3}t+s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

①に代入すると $r^2=\left|\left(\frac{1}{3}t-\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{2}{3}t+s\right)\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right|^2$

$$=\left(\frac{1}{3}t-\frac{3}{4}\right)^2\cdot4+\left(\frac{2}{3}t+s\right)^2\cdot3+2+2\cdot\left(\frac{1}{3}t-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}t+s\right)\cdot2$$

$$=\frac{4}{9}t^2-2t+\frac{9}{4}+\frac{4}{3}t^2+4st+3s^2+2+\frac{8}{9}t^2+\frac{4}{3}st-2t-3s$$

$$=\frac{8}{3}t^2+\left(\frac{16}{3}s-4\right)t+3s^2-3s+\frac{17}{4}$$

$$=\frac{8}{3}\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}s^2+s+\frac{11}{4}$$

$$=\frac{8}{3}\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+2$$

r^2 の最小値を求める。

$0\leqq t+s\leqq1$ なので、$\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2$ は　$t+s=\frac{3}{4}$ のとき 最小となり、そのとき

$r^2=\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+2$となる。さらに $t=\frac{3}{4}-s\geqq0$ なので、$0\leqq s\leqq\frac{3}{4}$

これより、$s=0$ のとき r^2 は最小となり、その値は $\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}+2=\frac{11}{4}$ である。

次に r^2 の最大値を求める。

$f(t)=\frac{8}{3}\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+2\quad(0\leqq t\leqq1)$　とおくと、

これは、軸が $t=\frac{3}{4}-s$ の放物線であり、$0\leqq\frac{3}{4}-s\leqq\frac{3}{4}$ なので

$\frac{3}{4}-s\leqq\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{4}\leqq s\leqq1$ のとき　$f(t)$ の最大値 は$f(1)$ となるが、

$t=1$ のとき $s=0$ となって 不適である。

$\frac{3}{4}-s>\frac{1}{2}$ すなわち $0\leqq s\leqq\frac{1}{4}$ のとき　$f(t)$ の最大値 は$f(0)$ となる。

$$f(0)=g(s)=3s^2-3s+\frac{17}{4}=3\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$$

$0\leqq s\leqq\frac{1}{4}$ より $s=0$ のとき最大値 $f(0)=g(0)=\frac{17}{4}$

以上より　$\frac{11}{4}\leqq r^2\leqq\frac{17}{4}$ となり、r の範囲は $\frac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}$ ……（答）となる。

※最後の最大値がちょっと手こずった。$\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2$ は　$t+s=0$ のとき 最大となる、としても同じ値になるが、もう一つの項 $\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2$ は $s=1$ のとき最大となり、そのとき $t=0$ である。このときも同じ値になる。つまり、最大値は $t=0$, $s=0$ または　$t=0$, $s=1$ の２つの場合がある、ということである。これを図で考えたら、円Sが点Oを通るときか、点Bを通るかの２つの場合、ともに最大値を取る、ということのようである。図を用いた解答もあるかな、と思うが、何故か、が難しそうである。

次にPythonでこの問題を分析する。何をしようか迷ったが、やはり問題文にある三角形が空間座

標上のどこにあるかが気になる。 また、$f(s,t)=\frac{8}{3}\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+2$ ，$0\leqq t+s\leqq 1$, $s\geqq 0$ ，$t\geqq 0$ の最小値が $\frac{11}{4}$ で最大値が $\frac{17}{4}$ であることを検証したい。ここでは、この２つを検証するプログラムを作成した。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_04_NO1－－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random

def vector_3d(ax, s_p, vec, color = ”red”,arrow_length_ratio=0.05):
  ax.quiver(s_p[0], s_p[1], s_p[2], vec[0], vec[1], vec[2],
        color = color, length = 1,
        arrow_length_ratio=arrow_length_ratio)
```

ベクトルを表示する関数
始点 (x , y , z) として、方向ベクトル $\vec{d}$=(a , b , c) を表示する。
ax.quiver(x , y , z , a , b , c , color=”色” , length=長さ ,
arrow_lenght_rario=矢印の大きさの比率)

```
def descartes_3d(ax, ran_x, ran_y, ran_z, ax_title,
                  x_label = ”x”, y_label = ”y”, z_label=”z”):
  ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
  ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
  ax.set_zlabel(z_label, fontsize = 12)
  ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
  ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
  ax.set_zlim(ran_z[0], ran_z[1])
  ax.set_title(ax_title, fontsize = 16)
  ax.grid()
```

座標空間を表示する関数
各軸のラベルはset_○labelで設定
xyz軸は座標ran_○[0]からran_○[1]までを設定
座標空間のタイトルはset_titleで設定

```
fig = plt.figure(figsize = (7, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection=’3d’)
title1 = ”Touhoku University 2023 Math qu.4 NO1”

descartes_3d(ax, [−0.5, 1], [−0.5, 2.7], [−0.5, 0.7], title1)
```

```
point_O = np.array([0, 0, 0])
point_A = np.array([2, 0, 0])
point_B = np.array([1,1,1])
point_C = np.array([1,2,3])
point_H = np.array([4/3,2/3,2/3])
point_Q = np.array([3/2,-1,1])
```

空間上の点の設定
$O(0,0,0)$ 、 $A(2,0,0)$ 、 $B(1,1,1)$
$C(1,2,3)$ 、 $H\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 、 $Q\left(\frac{3}{2},-1,1\right)$

座標空間に点の名前を表示
$O(-0.07,0,0)$ 、 $B(1,1,1)$ 、 $H\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 、 $Q\left(\frac{3}{2}+0.07,-1,1\right)$

```
ax.text(-0.07,0,0,"O",fontsize="xx-large")
ax.text(1,1,1,"B",fontsize="xx-large")
ax.text(4/3,2/3,2/3,"H",fontsize="xx-large")
ax.text(3/2+0.07,-1,1,"Q",fontsize="xx-large")
```

座標空間に次のベクトルを赤色、さらに矢印の大きさは全体の ５％で表示
$\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OH}$ 、 $\overrightarrow{BH}$

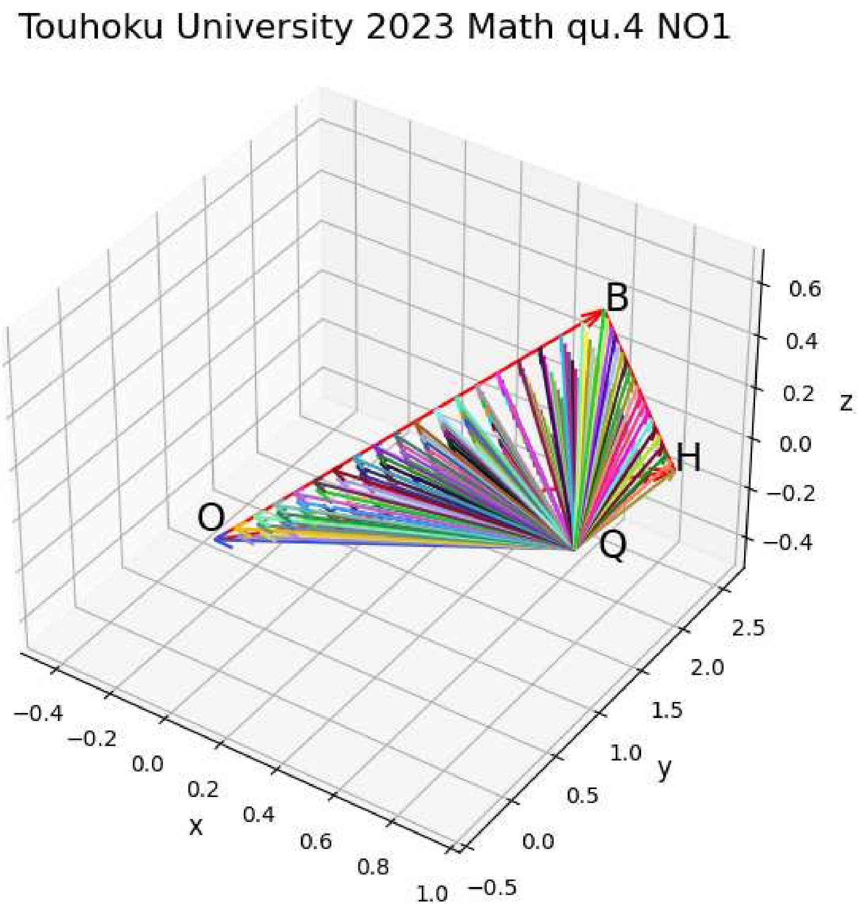
```
vector_3d(ax, point_O, point_B, "red",0.05)
vector_3d(ax, point_O, point_H, "red",0.05)
vector_3d(ax, point_B, point_H+(-1*point_B), "red",0.05)
```

座標空間に $\overrightarrow{QS}$ の軌跡を表示
$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}t\overrightarrow{OA}+\left(\frac{2}{3}t+s\right)\overrightarrow{OB}$ 、 s,t は０～１までの値を２０分割し、
さらに $s+t\leqq 1$ のときだけの $\overrightarrow{QS}$ を表示する。
ベクトルの色はランダム関数で１本ずつ違う色にする。

```
for s in np.linspace(0,1,20):
  for t in np.linspace(0,1,20):
    if s+t <= 1:
      point_S=1/3*t*point_A+(2/3*t+s)*point_B
      r=random.random()
      g=random.random()
      b=random.random()
      vector_3d(ax,point_Q,point_S+(-1*point_Q),color=(r,g,b))

plt.show()
```

――――――――――――――――――――――python program――――――――――

［出力］



なかなか面白い図である。

次に $f(s\,,t)=\dfrac{8}{3}\left(t+s-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(s+\dfrac{3}{2}\right)^2+2$ ，$0\leqq t+s\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の最小値が $\dfrac{11}{4}$ で最大値が $\dfrac{17}{4}$ であることを検証するプログラムを以下に示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_04_NO2－－－－－－－－－－－

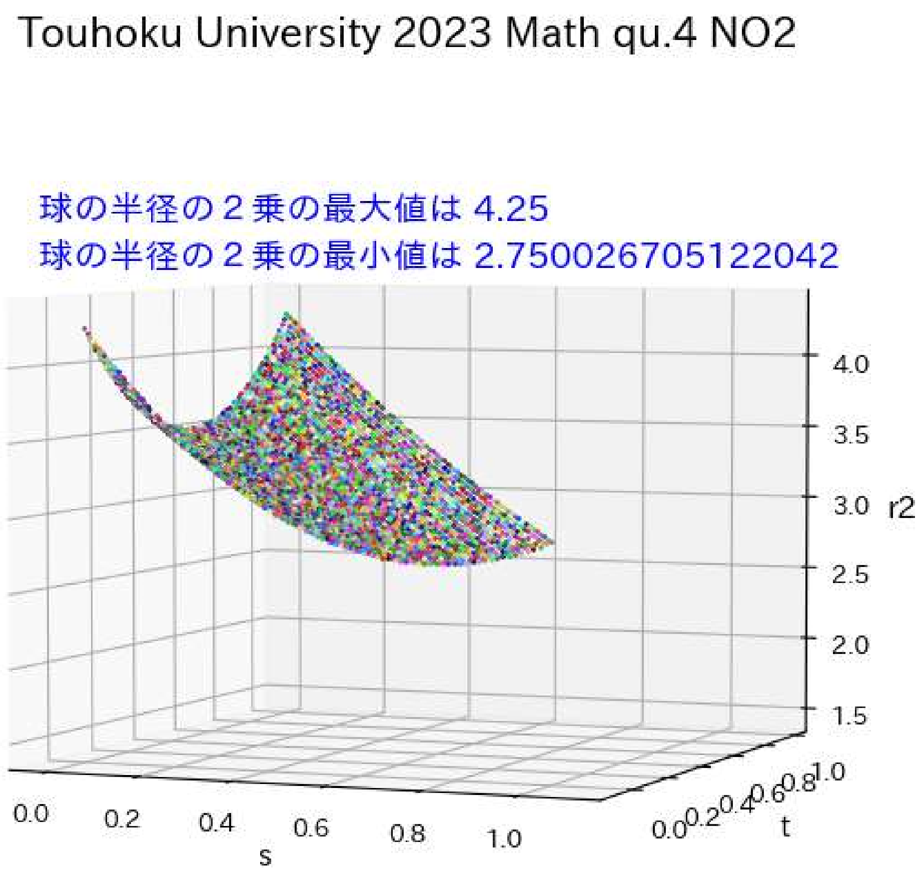
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import random
import japanize_matplotlib

def descartes_3d(ax, ran_x, ran_y, ran_z, ax_title,
                  x_label = "s", y_label = "t", z_label="r2"):
  ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
```

```
    ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
    ax.set_zlabel(z_label, fontsize = 12)
    ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
    ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
    ax.set_zlim(ran_z[0], ran_z[1])
    ax.set_title(ax_title, fontsize = 16)
    ax.grid()

fig = plt.figure(figsize = (7, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
title1 = "Touhoku University 2023 Math qu.4 NO2"

descartes_3d(ax, [-0.1, 1.1], [-0.1, 1.1], [2, 5], title1)
```

$f(s,t)=\frac{8}{3}\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+2$ の$f(s,t)$ を r2 とし、s , t はともに０から１までを１００分割した値を入れ、s+t≦1 のときに、$r2=\frac{8}{3}\left(t+s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+2$ の値を計算する。その計算した結果を空間座標上に色をランダムに変えながらプロットし、さらに、r2_sに格納する。最後に格納しているr2の最大値と最小値を出力する。

```
r2_s = []
for s in np.linspace(0,1,80):
    for t in np.linspace(0,1,80):
        if s+t <= 1:
            r2=8/3*s**2+3*t**2+16/3*s*t-3*t-4*s+17/4
            r2_s.append(r2)
            r=random.random()
            g=random.random()
            b=random.random()
            ax.scatter(s,t,r2,s=1,color=(r, g, b))

ax.text(0.2,-0.6,5,"球の半径の２乗の最大値は{}".format(max(r2_s)),
        color="blue",size=14)
ax.text(0.2,-0.6,4.7,"球の半径の２乗の最小値は{}".format(min(r2_s)),
        color="blue",size=14)
plt.show()
```
ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーpython programーーーーーーーーーーー

［出力］



これもなかなか面白い図である。さらに、 $\frac{17}{4}=4.25$ 、 $\frac{11}{4}=2.75$ なので、机上での計算の答えとほぼ同じになった。最小値が多少ずれているのは、100分割の精度だからである。
以上で第４問の解説は終わる。

第　5　問

整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

(1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

(2) a, b を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ。

（１）この問題を最初に読んだとき、教科書レベルの問題なので、どっかに落とし穴があったりするのかな、と考えたが、多分（２）を解くためのヒントを示してくれたと思い、以下の証明にした。

［証明］

$g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q(x)$ とおくと、余りが $r(x)$ なので、

$g(x)=f(x)\cdot q(x)+r(x)$となる。両辺を７乗すると、

$g(x)^7=(f(x)\cdot g(x)+r(x))^7$

$={}_7C_0\{f(x)g(x)\}^7+{}_7C_1\{f(x)g(x)\}^6r(x)+{}_7C_2\{f(x)g(x)\}^5r(x)^2+\cdots{}_7C_6\{f(x)g(x)\}r(x)^6+{}_7C_7r(x)^7$

$=f(x)[{}_7C_0f(x)^6g(x)^7+{}_7C_1f(x)^5g(x)^6r(x)+{}_7C_2f(x)^4g(x)^5r(x)^2+\cdots+{}_7C_6g(x)r(x)^6]+r(x)^7$

これは、 $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは等しいことを示している。［終］

（２）この問題は、 $A\div B=Q$ 余り$R \Leftrightarrow A=B\cdot Q+R$ と n次の整式で割った余りは n$-$1になる、という二つを使えば出来そうである。さらに、 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ の形は、x で微分する、というテクニックを使うのだろう、と予測する。

［解］ $h(x)^7$ を $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ で割った商を $q(x)$ とおくと、余りが $h_1(x)$ なので、

$h(x)^7=(x-1)^2(x-2)\cdot q(x)+h_1(x)$ となる。

さらに、３次式で割った余りなので、$h_1(x)=x^2+cx+d$ と置ける。

$h(x)=x^2+ax+b$ なので、

$\{x^2+ax+b\}^7=(x-1)^2(x-2)\cdot q(x)+x^2+cx+d\cdots\cdots(a)$ となる。

次に、 $h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った商を $q_1(x)$ とおくと、余りが $h_2(x)$ なので、

$h_1(x)^7=(x-1)^2(x-2)\cdot q_1(x)+h_2(x)$ となる。

さらに、 $h(x)=x^2+ax+b$ と等しいので $h_2(x)=x^2+ax+b$ と置ける。

すなわち $\{x^2+cx+d\}^7=(x-1)^2(x-2)\cdot q_1(x)+x^2+ax+b\cdots\cdots(b)$ となる。

(a) に $x=1$ を代入　$(1+a+b)^7=1+c+d\cdots\cdots$①

$x=2$ を代入　$(4+2a+b)^7=4+2c+d\cdots\cdots$②

(b) に $x=1$ を代入　$(1+c+d)^7=1+a+b$……③

$x=2$ を代入　$(4+2c+d)^7=4+2a+b$……④

(a) の両辺を x で微分すると、

$7(x^2+ax+b)^6(2x+a)=2(x-1)(x-2)q(x)+(x-1)^2q(x)+(x-1)^2(x-2)q'(x)+2x+c$……$(a)'$

$(a)'$ に $x=1$ を代入　$7(1+a+b)^6(2+a)=2+c$……⑤

(b) の両辺を x で微分すると、

$7(x^2+cx+d)^6(2x+c)=2(x-1)(x-2)q_1(x)+(x-1)^2q_1(x)+(x-1)^2(x-2)q_1{}'(x)+2x+a$……$(b)'$

$(b)'$ に $x=1$ を代入　$7(1+c+d)^6(2+c)=2+a$……⑥

①と⑤を⑥に代入

$7(1+a+b)^{42}\cdot 7(1+a+b)^6(2+a)=2+a$

$(2+a)\{49(1+a+b)^{48}-1\}=0$……⑦

②を④に代入

$(4+2a+b)^{49}=4+2a+b$

$(4+2a+b)\{(4+2a+b)^{48}-1\}=0$……⑧

①を③に代入

$(1+a+b)^{49}=1+a+b$

$(1+a+b)\{(1+a+b)^{48}-1\}=0$……⑨

⑦、⑧、⑨を同時に満たす a 、 b の値が答えになるので、

⑦より　$a=-2$ または $1+a+b=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{1}{24}}$

ここで $1+a+b=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{1}{24}}$ が⑨を満たすことはないので、 $a=-2$ のみ適する。

$a=-2$ を⑧に代入すると $b(b^{48}-1)=0$ より $b=0$ または $b=\pm1$……⑧′

$a=-2$ を⑨に代入すると $(-1+b)\{(-1+b)^{48}-1\}=0$ より $b=1$ または $-1+b=\pm1$

すなわち $b=0$ または $b=1$ または $b=2$ ……⑨′

⑧′と⑨′を同時に満たすのは、 $b=0$ または $b=-1$

よって、求める (a,b) の組は　$(a,b)=(-2,-1)$ または $(-2,0)$ ……（答）である。

次にPythonで分析するが、ここでは（２）の答えが本当かどうかをPythonで検証してみよう。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_05_NO1－－－－－－－－－－－

```
import sympy as sp
import numpy as np
sp.init_printing(pretty_print=True)
```

```
f1=(x−1)**2
f2=(x−2)
ff=f1*f2
print("f(x)= ")
display(ff)
ab_d = [[−2,−1],[−2,0],[−2,1],[−2,2],[−1,0]]
for ab in ab_d:
  hh=x**2+ab[0]*x+ab[1]
  h1=sp.div(hh**7,ff)
  print("a=",ab[0]," b=",ab[1]," のとき")
  print("h(x)=")
  display(hh)
  print("h1(x)=")
  display(h1[1])
  h2=sp.div(h1[1]**7,ff)
  print("h2(x)=")
  display(h2[1])
```

$f_1(x)=(x-1)^2$

$f_2(x)=(x-2)$

$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$

$(a\,,b)=(-2\,,-1)$ 、 $(-2\,,0)$

$(-2\,,1)$ 、 $(-2\,,2)$

$(-1\,,0)$

の４つのパターンを調べる。

$h(x)=x^2+ax+b$

h1=sp.div(hh**7 , ff)の意味

hh^7 を ff で割った結果を

（商、余り）の型として返す。

つまり、h1[0] が商で、h1[1]が余りになる。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−python program−−−−−−−−−−−

［出力］

f(x)=

$(x-2)(x-1)^2$

a= -2 b= -1 のとき

h(x)=

x^2-2x-1

h1(x)=

$127x^2-254x-1$

h2(x)=

$562949953421311x^2-1125899906842622x-1$

$h(x)^7=(x^2-2x-1)^7$ のとき

$h(x)^7\div f(x)$ すなわち $(x^2-2x-1)^7\div(x-2)(x-1)^2$ の余りは $h_1(x)=127x^2-245x-1$ となる。

さらに、 $h(x)^7\div f(x)$ すなわち

$(127x^2-245x-1)^7\div(x-2)(x-1)^2$ の余りは、

$562949953421311x^2-1125899906842622x-1$ となる。

a= -2 b= 0 のとき

h(x)=

x^2-2x

h1(x)=

x^2-2x

h2(x)=

x^2-2x

$h(x)^7=(x^2-2x)^7$ のとき

$h(x)^7\div f(x)$ すなわち $(x^2-2x)^7\div(x-2)(x-1)^2$ の余りは $h_1(x)=x^2-2x$ となる。

さらに、 $h(x)^7\div f(x)$ すなわち

$(x^2-2x)^7\div(x-2)(x-1)^2$ の余りは、

$h_2(x)=x^2-2x$ となる。

a= -2 b= 1 のとき

h(x)=

x^2-2x+1

h1(x)=

x^2-2x+1

h2(x)=

x^2-2x+1

$h(x)^7=(x^2-2x+1)^7$ のとき

$h(x)^7 \div f(x)$ すなわち $(x^2-2x+1)^7 \div (x-2)(x-1)^2$ の

余りは $h_1(x)=x^2-2x+1$ となる。

$(x^2-2x+1)^7 \div (x-2)(x-1)^2$ の余りは、

$h_2(x)=x^2-2x+1$ となる。

a= -2　b= 2　のとき
h(x)=

x^2-2x+2

h1(x)=

$127x^2-254x+128$

h2(x)=

$562949953421311x^2-1125899906842622x+562949953421312$

$h(x)^7=(x^2-2x+2)^7$ のとき

$(x^2-2x+1)^7 \div (x-2)(x-1)^2$ の余りは $127x^2-245x+128$。

$(x^2-2x+1)^7 \div (x-2)(x-1)^2$ の余りは

$562949953421311x^2-1125899906842622x+562949953421312$

a= -1　b= 0　のとき
h(x)=

x^2-x

h1(x)=

$128x^2-256x+128$

h2(x)=

$562949953421312x^2-1125899906842624x+562949953421312$

$h(x)^7=(x^2-x)^7$ のとき

$h(x)^7 \div f(x)$ すなわち $(x^2-x)^7 \div (x-2)(x-1)^2$ の

余りは $h_1(x)=128x^2-256x+128$ となる。

$(128x^2-256x+128)^7 \div (x-2)(x-1)^2$ の余りは、

$562949953421312x^2-1125899906842624x+562949953421312$

いつもはVisualStudioCodeを使っているが、これだと数式の出力が綺麗にはならないので、Jupyter Note で実行し、それをスクリーンショットで撮ったのを掲載したのが上記の出力結果である。

この結果を見ると、少なくとも、 $a=-2, b=0$ と $a=-2, b=1$ は問題に適することが分かったが、これが全てである、という証明は、虱潰しのようなプログラムでは不可能である。その証明は、問題の解法にあるような、ある意味、アルゴリズムで示す方法しかないのではないか、と思う。
以上で第５問の解説は終わる。

第　6　問

O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする。

以下，座標空間内の 2 点 A, B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i), (ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii), (iv), (v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

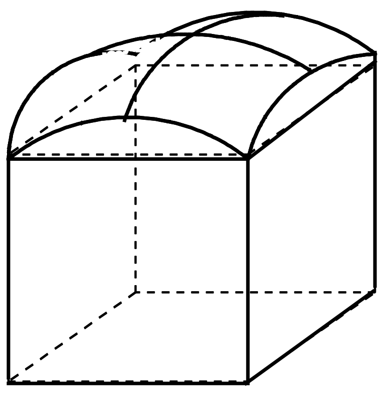
(iii) $\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない。

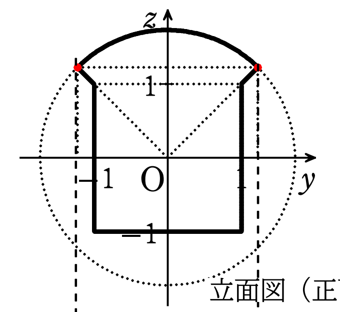
(v) 線分 NP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ。

（1）この問題は私にとって難問中の難問である。何が難しいかというと、まず図のイメージが掴めない、という点である。立方体の上に球の一部の冠が載っていることは何となく予想できるが、それがどのように載っているのか。そこがこの問題が解けるかどうかのポイントであろう。取りあえず、大まかな図を描くことから始める。

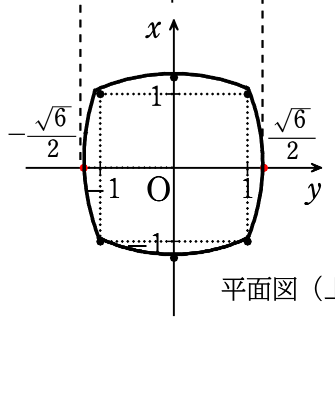
［解］



見取り図

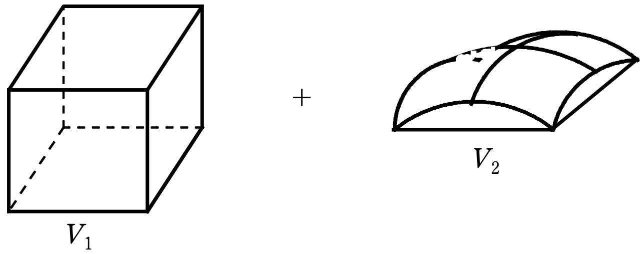


立面図（正面から見た図）



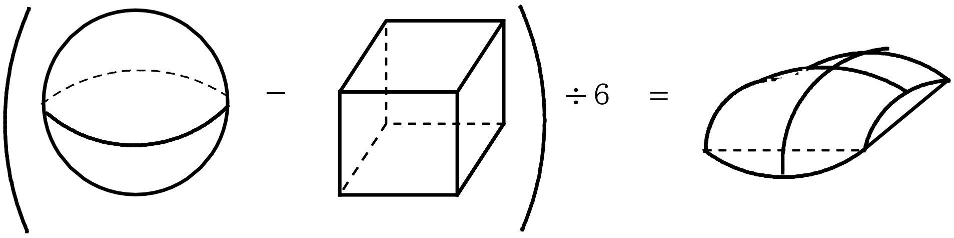
平面図（上から見た図）

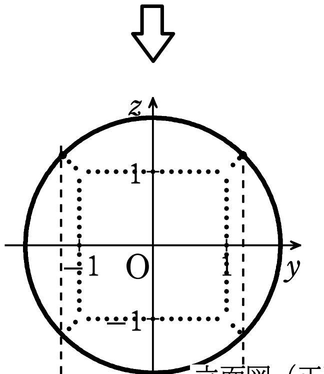
図から、求める体積は



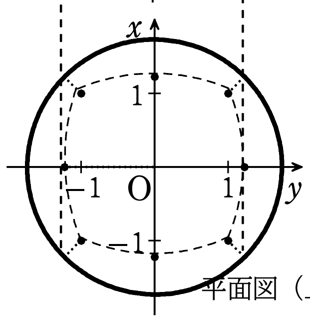
V_1 は立方体なので、その体積は $V_1=2^3=8$ である。

ここで、 V_2 は球の体積から、立方体の体積を引き、それを６等分したものである。





立面図（正面から見た図）



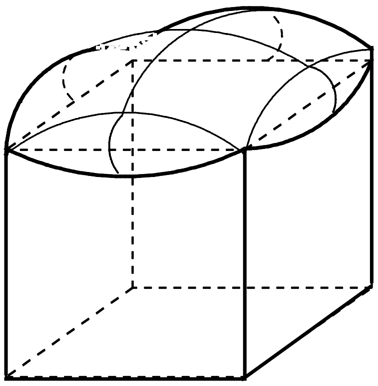
平面図（上から見た図）

図より　$V_2=\left(\dfrac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{3}^{\,3}-2^3\right)\div 6=\dfrac{2\sqrt{3}-4}{3}$

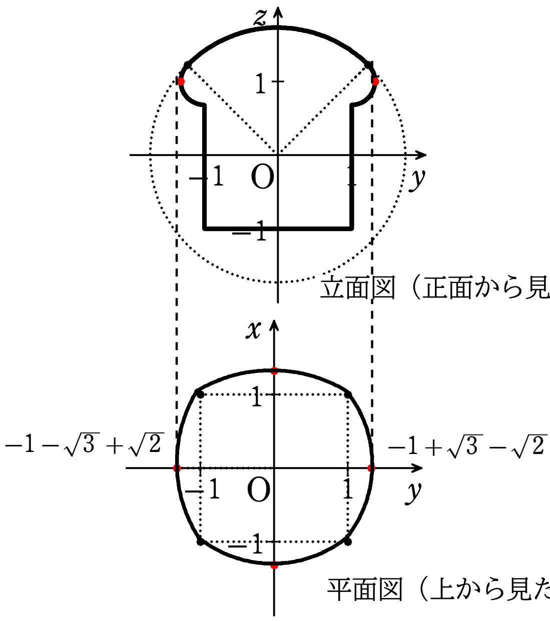
よって、求める体積 $\underline{V_{(1)}=V_1+V_2=8+\dfrac{2\sqrt{3}\pi-4}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}\pi+20}{3}}$ ……（答）である。

※気付いたら簡単であるが、これが本当かどうか，検証するのには骨が折れた。最終的には、投影図を作成したら、この考え方であっていると確信が持てた。

（２）この問題もどのような図になるのか、それを考えることから始まった。（１）の図の冠部分の周りが垂れ下がるような図になるのでは、ということでその概形図を描いてみる。



見取り図



立面図（正面から見た図）

平面図（上から見た図）

（1）の答えに増えた部分の体積を加えよう、という考えで解いてみる。追加された部分は、両サイドが閉じて真ん中に向かって膨らんでいるような形、要するにサヤエンドウみたいな形である。その体積をどのように求めるか。（1）のようにちょっとした発想の転換で求められるのだろうか、などといろいろ考えるが、問題文に「必要ならば、 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α を用いてよい。」とある。これは、積分を使ってしか求められないよ、という意味と解釈できる。それではここで、これに関する教科書を掲示しよう。

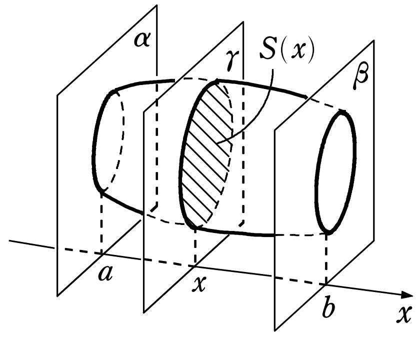
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ⅲ（数研出版）－－－－－－－－－－－－

A　定積分と体積

これまでに、面積を区分求積法によって計算し，定積分を和の極限で表した。立体の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる。

与えられた立体の，平行な 2 つの平面 α，β の間に挟まれた部分の体積 V を求めてみよう。

α，β に垂直な直線を x 軸にとり，x 軸と α，β との交点の座標を，それぞれ a，b とする。また，$a \leqq x \leqq b$ として，x 軸に垂直で，x 軸との交点の座標が x である平面 γ でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，次の公式が成り立つ。



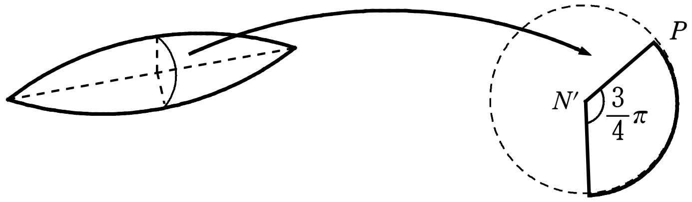
> 立体の断面積と体積
>
> $$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ここまで「数学Ⅲ（数研出版）」からの引用－－－

［解］（１）に追加される図形の断面図を考える。

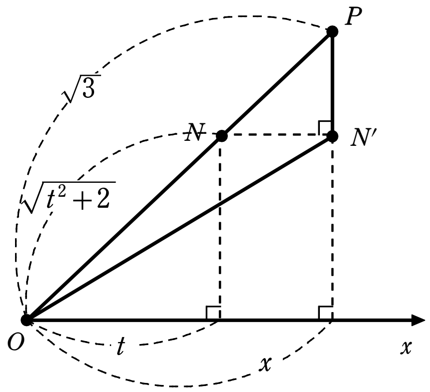
$N(t,1,1)$ とおき、直線 ON 上に点 P があり、その点 P を通り x 軸に垂直な平面で切った断面図を考えると、 $ON=\sqrt{t^2+1+1}=\sqrt{t^2+2}$ となる。

このとき断面図は、$ON+NP\leqq\sqrt{3}$ を満たす点 P の集合体での切り口、すなわち球での切り口になるので、下図のような扇形になる。



その円弧上の点を $P(x,y,z)$ 、中心をN' とおくと、 $N'(x,1,1)$

ここで、点 P と点 N と点 N' の関係を平面 $ONPN'$ について考える。



これより $PN'^2=(\sqrt{3}-\sqrt{t^2+2})^2-(x-t)^2$

$$=3-2\sqrt{3(t^2+2)}+t^2+2-x^2+2tx-t^2$$

$$=5-2\sqrt{3(t^2+2)}-x^2+2tx\cdots\cdots①$$

さらに、図より $\sqrt{3}:\sqrt{t^2+2}=x:t$ なので、 $\sqrt{t^2+2}\,x=\sqrt{3}\,t$

両辺を２乗して、式変形すると 、$t>0$ なので $t=\dfrac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3-x^2}}$ となる。

これを①に代入すると $PN'^2=5-2\sqrt{3\left(\dfrac{2x^2+6-2x^2}{3-x^2}\right)}-x^2+\dfrac{2\sqrt{2}\,x^2}{\sqrt{3-x^2}}$

$$=-x^2+5-\frac{2\sqrt{2}(3-x^2)}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$=-x^2+5-2\sqrt{2}\sqrt{3-x^2}$$

PN' が断面図の扇形の半径になるので、断面図の面積は

$S(x)=\dfrac{3}{8}(-x^2+5-2\sqrt{2}\sqrt{3-x^2})\pi$となり、これより（１）に追加される体積は

$V_3=4\displaystyle\int_{-1}^{1}S(x)dx=3\pi\int_0^1(-x^2+5-2\sqrt{2}\sqrt{3-x^2})dx\cdots\cdots②$ となる。

ここで、 $I_1=\displaystyle\int_0^1(-x^2+5)dx$ 、 $I_2=\displaystyle\int_0^1\sqrt{3-x^2}\,dx$ とおく。

$I_1=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+5x\right]_0^1=\dfrac{14}{3}\cdots\cdots③$

次に、I_2 を求める。$x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと

$dx=\sqrt{3}\cos\theta\, d\theta$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

x	$0\to 1$
θ	$0\to\alpha$

$$I_2=\int_0^{\alpha}\sqrt{3-3\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\alpha}\sqrt{3}\cos\theta\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\alpha}\frac{3(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta=\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{4}\sin 2\alpha=\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots④$$

③と④を②に代入すると

$V_3=3\pi\left\{\dfrac{14}{3}-2\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}=\pi(8-9\sqrt{2}\,\alpha)$ となる。

よって、求める体積 $V_{(2)}=V_{(1)}+V_3=\dfrac{2\sqrt{3}\,\pi+20}{3}+\pi(8-9\sqrt{2}\,\alpha)$

$=\dfrac{20}{3}+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+8-9\sqrt{2}\,\alpha\right)\pi\cdots\cdots$（答）となる。

※これはかなりの時間を掛けた。私は本番では解ききれない。これを時間内で解けた受験生はいるのだろうか。多分、いると思う。世の中、唖然とするほど天才的な人はいる。凡人と何が違うかと言えば、集中力が半端じゃない。集中しているときは、他の人を寄せ付けない鬼気迫る雰囲気を醸し出す。そのような人は、是非ともその能力を人類の幸せのために使ってほしい、と切に望む。

　次に、これをPythonで分析してみる。解説中の図形は、基本的に手書きの図形と同じで、それを図形編集ソフトで作っているだけである。つまり、どんな形になるのか、を予想して作っただけである。やはり検証は、この空間図形をPython 描いてみることだろう。しかし、それがなかなか難しかった。基本的に次の３つの図形を描くプログラムが必要である。
（１）立方体　（２）球　（３）空間座標内での円弧
まず立方体を表示する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_06_NO1－－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection, Line3DCollection
import mpl_toolkits.mplot3d.art3d as art3d
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Rectangle
from scipy.spatial.transform import Rotation
plt.rcParams['font.family'] = 'IPAmjMincho'
```

初期設定：使う可能性のあるライブラリをインポートし、さらに、日本語を表示出来るように日本語フォントを読み込んでいる。

```
def  descartes_3d(ax, ran_x, ran_y, ran_z, ax_title,
            x_label = "x軸", y_label = "y軸", z_label="z軸"):
   ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
```

```
  ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
  ax.set_zlabel(z_label, fontsize = 12)
  ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
  ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
  ax.set_zlim(ran_z[0], ran_z[1])
  ax.set_title(ax_title, fontsize = 16)
  ax.grid()
```

descartes_3dは座標空間の大きさや座標軸などの表示をする関数。

m_cubeは六面体を表示する関数。
apex1で８個の頂点の座標を指定。
facecolors は面の色を指定。
edgecolors は辺の色を指定。
alpha は透明度を指定。

```
def  m_cube(ax,apex1,facecolors=”blue”,edgecolors=”red”,alpha=0.5):
  ax.scatter3D(apex1[:, 0], apex1[:, 1], apex1[:, 2],color=”red”,s=6)
  cube1 = [[apex1[0],apex1[1],apex1[2],apex1[3]],
      [apex1[4],apex1[5],apex1[6],apex1[7]],
      [apex1[0],apex1[1],apex1[5],apex1[4]],
      [apex1[2],apex1[3],apex1[7],apex1[6]],
      [apex1[1],apex1[2],apex1[6],apex1[5]],
      [apex1[4],apex1[7],apex1[3],apex1[0]]]
  ax.add_collection3d(Poly3DCollection(cube1, facecolors = facecolors,
              linewidths=0.3, edgecolors=edgecolors, alpha=alpha))
```

ax.scatter3Dで８個の頂点を赤で表示。
sは表示する頂点の大きさを指定。
cube1で６面を指定。

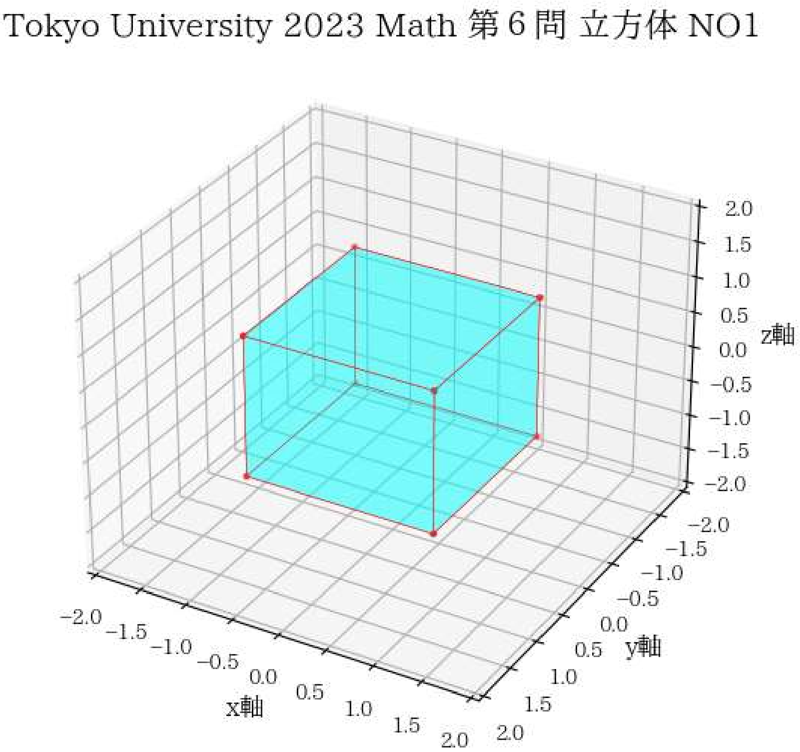
```
fig = plt.figure(figsize = (7, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection=’3d’)
title1 = ”Tokyo University 2023 Math 第６問 立方体 NO1”

descartes_3d(ax, [−2,  2], [−2,  2], [−2,  2], title1)

apex1 = np.array([[−1, −1, −1],
          [1, −1, −1 ],
          [1, 1, −1],
          [−1, 1, −1],
          [−1, −1, 1],
          [1, −1, 1 ],
          [1, 1, 1],
          [−1, 1, 1]])
```

[−2, 2], [−2, 2], [−2, 2]は左から順にx、y、z軸の幅の指定である。
pythonのmatplotlibで空間座標軸を表示すると、標準でx 軸が左右、y軸が奥行きで表示でされる。しかし、その視点を変えると教科書通りの x 軸が奥行き、 y 軸が左右になるので、そのまま指定した。ただし、標準での表示の y 軸は手前が負で奥が正になるので、それを変えたい場合は２番目を [2, −2] とするテクニックもある。

```
m_cube(ax,apex1,facecolors=”cyan”,alpha=0.3)

plt.show()
```

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−python program−−−−−−−−−−−

［出力］



次に、球を表示する。これにはまず、媒介変数を使っての円の方程式を示す。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−数学Ⅲ（数研出版）−−−−−−−−−−−−

○　一般角 θ を用いた円の媒介変数表示

原点 O を中心とする半径 a の円

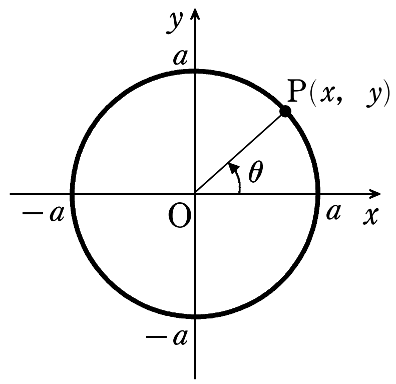
$$x^2+y^2=a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

上の点を $P(x,\ y)$ とし，動径 OP の表す一般角を θ とすると，三角関数の定義から

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta$$

ただし，θ は弧度法で表した角とする。

これは，円 ① の媒介変数表示である。



−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−ここまで「数学Ⅲ（数研出版）」からの引用−−−

これを拡張して球の媒介変数表示を考える。しかし、これは高校の教科書には掲載されていないので、何とかしてここで説明しよう。

基本的な考え方として、 z 軸とのなす角と x 軸とのなす角の２つの媒介変数が必要になるので、 z 軸とのなす角を z_arg とおき、 x 軸とのなす角を x_arg とおく。それを図で表したのが、次ページの図１である。

球は原点からの距離が一定 r である点の集まりである。
図の点P の座標を (x, y, z) とおくと、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} x = r\sin(z\_arg)\cos(x\_arg) \\ y = r\sin(z\_arg)\sin(x\_arg) \\ z = r\cos(z\_arg) \end{cases}$$

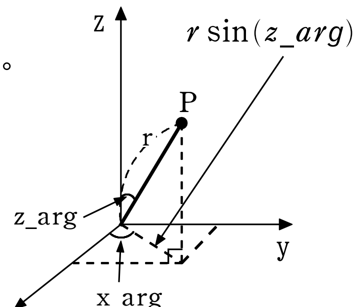


図 1

この x_arg と z_arg を 0 から 2π までの値を変化させた点P の軌跡が原点中心、半径 r の球になる。そのプログラムを以下に示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_06_NO2－－－－－－－－－－－

ライブラリ等のインポートはtokyo_23_06_NO1 と同じなので割愛

関数descartes_3dはtokyo_23_06_NO1と同じなので割愛

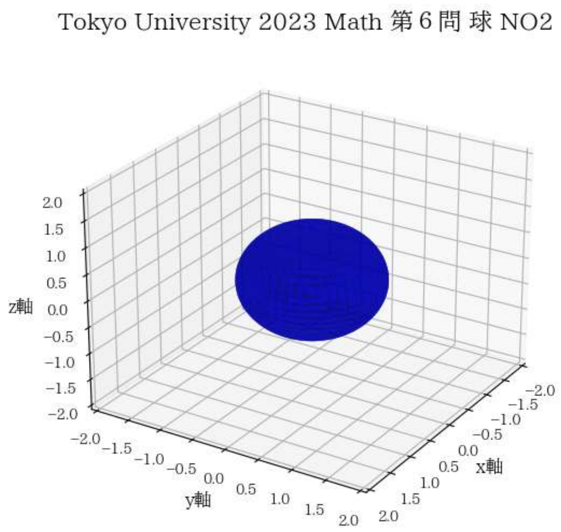
```
def  m_sphere(ax,r=1,
        start_z_arg=0,end_z_arg=2*np.pi,
        start_x_arg=0,end_x_arg=2*np.pi,
        color="blue",alpha=0.5):
   xx_arg = np.linspace(start_x_arg, end_x_arg, 100)
   zz_arg = np.linspace(start_z_arg, end_z_arg, 100)
   xx, zz = np.meshgrid(xx_arg, zz_arg)
   x = np.cos(xx) * np.sin(zz) * r
   y = np.sin(xx)*np.sin(zz) * r
   z = np.cos(zz) * r

   ax.plot_surface(x,y,z, color='blue',alpha=0.5)

fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
title1 = "Tokyo University 2023 Math 第６問 球 NO2"

descartes_3d(ax, [-2, 2], [-2, 2], [-2, 2], title1)

m_sphere(ax,r=1)

plt.show()
```

標準はz_arg は$0\sim 2\pi$、 x_arg も$0\sim 2\pi$ までの値を取る。それを100分割した値をarray型として定義する。

$numpy$ の $meshgrid$ によって、格子点を作成する。各格子点に対応する値によって、x, y, z の座標を計算する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－－

［出力］



最後に「空間座標内での円弧」を表示するが、これがかなり手こずった。第６問を解くまでの時間と同じぐらいの時間を掛けた。折角だから試行錯誤した足跡を示すことにする。

まず最初は、球面のプログラムから簡単に円を表示できるが、 xy 平面に平行か垂直かの２種類しかつくれなかった。その関数と表示部分だけを示す。

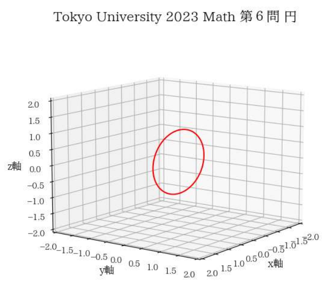
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_06_NO3_1－－－－－－－－－－

```
def  m_circle(ax,r＝1,start_z_arg＝0,end_z_arg＝2*np.pi,
                 x_arg＝0,color＝"blue",alpha＝1):
   xx_arg ＝ np.linspace(0, x_arg, 100)
   zz_arg ＝ np.linspace(start_z_arg, end_z_arg, 100)
   x ＝ np.cos(xx_arg) * np.sin(zz_arg) * r
   y ＝ np.sin(xx_arg) * np.sin(zz_arg) * r
   z ＝ np.cos(zz_arg) * r
   return x,y,z

x,y,z＝m_circle(ax)
ax.plot(x, y, z, color＝"r")
```

x 軸との偏角 xx_arg を常に値を0として、 z 軸との偏角 zz_arg を0～ 2π と変化させる。すると、 xy 平面に垂直な円が描ける。これを逆にすると xy 平面に平行な円になる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－－

［出力］



この円を45°傾けるにはどうすればいいのか、いろいろ悩んでいた途中に面白い図形が出来たので、それを示す。

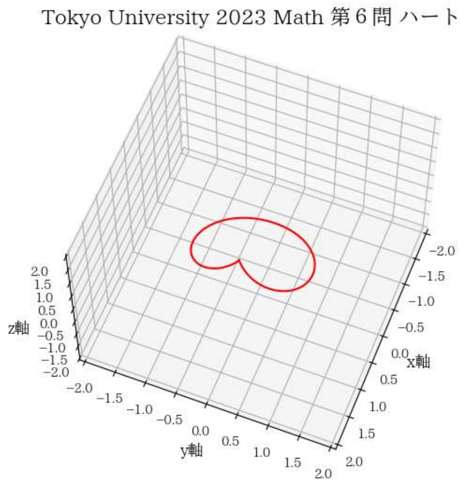
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_06_NO3_2－－－－－－－－－－

```
def  m_heart(ax,r=1,start_z_arg=0,end_z_arg=2*np.pi,
                  x_arg=2*np.pi,color="red",alpha=1):
   xx_arg = np.linspace(0, x_arg, 100)
   zz_arg = -1/(2*np.pi)*(xx_arg-np.pi)**2+3/4*np.pi

   x = np.cos(xx_arg) * np.sin(zz_arg) * r
   y = np.sin(xx_arg) * np.sin(zz_arg) * r
   z = np.cos(zz_arg) * r
   return x,y,z
```

x 軸との偏角 xx_arg を0～ 2π と変化させ、 z 軸との偏角 zz_arg を $-\frac{1}{2\pi}(xx\_arg-\pi)^2+\frac{3}{4}\pi$ の式に代入して計算する。その理由として、zz_arg の値を、$\frac{\pi}{4}\sim\frac{3\pi}{4}$ に無理矢理にしたら、 xy 平面とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ になる円が描けるのでは、という思い込みだったが、出力した図形がなかなか面白い図形になったのでここに掲載する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－－

［出力］



このように試行錯誤を続けたが、 xy 平面に対して任意の角度で傾ける円を表示することが、なかなか難しかった。最終的には、行列を使って回転させるしかないかな、と思っていろいろ調べたら、Pythonのライブラリの中に、「Scipy：高水準の科学技術計算」なるものを見つけ、この中に、図形を任意の角度に回転させる Rotation を見つけた。様々な回転の仕方があるようだが、ここでは回転ベクトル $\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$ を使った方法で作成した。これは x 軸、 y 軸、 z 軸の回りに、α、β、γ だけ回転させる、というものである。そのプログラムを次に示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_06_NO3_3－－－－－－－－－－

ライブラリ等のインポートはtokyo_23_06_NO1 と同じなので割愛

関数descartes_3dはtokyo_23_06_NO1と同じなので割愛

```
def  m_circle(ax,r=1,start_z_arg=0,end_z_arg=2*np.pi,
        x_arg=0,color="blue",alpha=0.5):
   xx_arg = np.linspace(0, x_arg, 100)
   zz_arg = np.linspace(start_z_arg, end_z_arg, 100)
   x = np.cos(xx_arg) * np.sin(zz_arg) * r
   y = np.sin(xx_arg) * np.sin(zz_arg) * r
   z = np.cos(zz_arg) * r
   return x,y,z
```

関数m_circle で円を描く。

```
def  m_rotation(x,y,z,rot_vector=[np.pi/4,0,0]):
   x1 = x.reshape(100,1)
   y1 = y.reshape(100,1)
   z1 = z.reshape(100,1)
   xyz = np.r_["1", x1 , y1 , z1]
    rot = Rotation.from_rotvec(np.array(rot_vector))
   xyz2 = rot.apply(xyz)
   x2=xyz2[:,0]
   y2=xyz2[:,1]
   z2=xyz2[:,2]
   return x2,y2,z2
```

関数m_circle で作成された $x\ y\ z$ は $ndarray$ で次元数は 1 で要素数は100である。それを $reshape$ によって、次元数を100、各要素数を1にする。

np.r_["1", x1 , y1 , z1]によって、x1 , y1 , z1 を 1 次元で各要素 3 の配列に結合する。

Rotation関数を使って、回転ベクトルrot_vectorを使って回転させ、その配列をxyz2 にする。

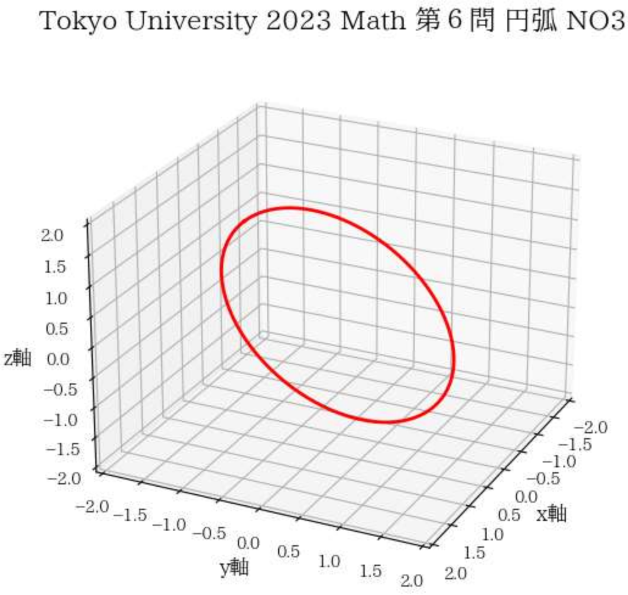
xyz2 をx2、y2、z2 に分割する。

```
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
title1 = "Tokyo University 2023 Math 第６問 円弧 NO3"
descartes_3d(ax, [−2, 2], [−2, 2], [−2, 2], title1)

x,y,z=m_circle(ax,r,start_z_arg=0,end_z_arg=2*np.pi)
x,y,z=m_rotation(x,y,z,rot_vector=[np.pi/4,0,0])
ax.plot(x, y, z, color="r",lw=2)

plt.show()
```

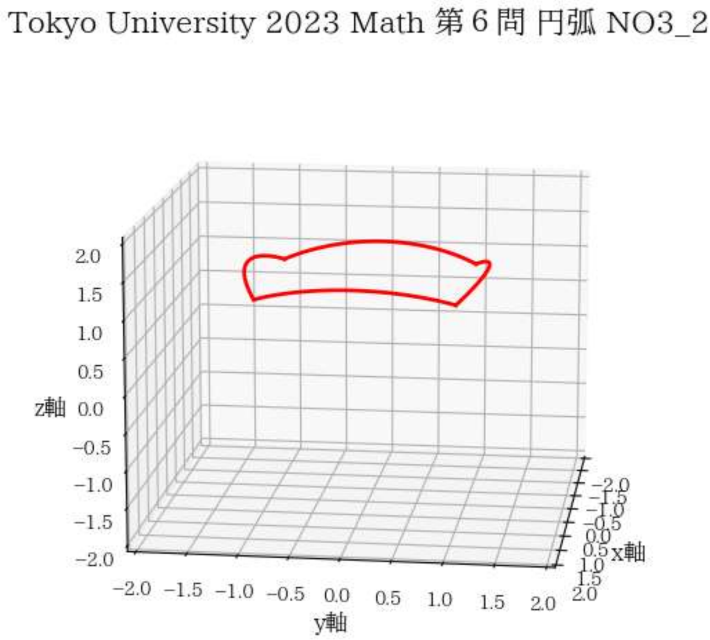
回転ベクトル rot_vector=[$\frac{\pi}{4}$,0,0] はx軸の回りに時計と反対方向45°だけ回転させる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－

［出力］



さらに、この円を立方体の頂点までとして、さらに４つ並べたのが、次の図である。



それでは最後に、今までの３つを全て並べたプログラムを以下に示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_23_06_NO3－－－－－－－－－－－

ライブラリ等のインポートはtokyo_23_06_NO1 と同じなので割愛

関数descartes_3d はtokyo_23_06_NO1と同じなので割愛

関数m_cube はtokyo_23_06_NO1と同じなので割愛

関数m_sphere はtokyo_23_06_NO2と同じなので割愛

関数m_circle はtokyo_23_06_NO3_3と同じなので割愛

関数m_rotation はtokyo_23_06_NO3_3と同じなので割愛

```
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
title1 = "Tokyo University 2023 Math 第６問(1) NO4"
descartes_3d(ax, [−2, 2], [−2, 2], [−2, 2], title1)

apex1 = np.array([[−1, −1, −1],
          [1, −1, −1 ],
          [1, 1, −1],
          [−1, 1, −1],
          [−1, −1, 1],
          [1, −1, 1 ],
          [1, 1, 1],
          [−1, 1, 1]])
m_cube(ax,apex1,facecolors="cyan",alpha=0.3)
。
alpha = np.arcsin(1/np.sqrt(3))
r= np.sqrt(3)
m_sphere(ax,r,start_z_arg=0,end_z_arg=np.pi/2−alpha)
```

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる α は、 $\sin x$ の逆関数となって、

$\alpha = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ または $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

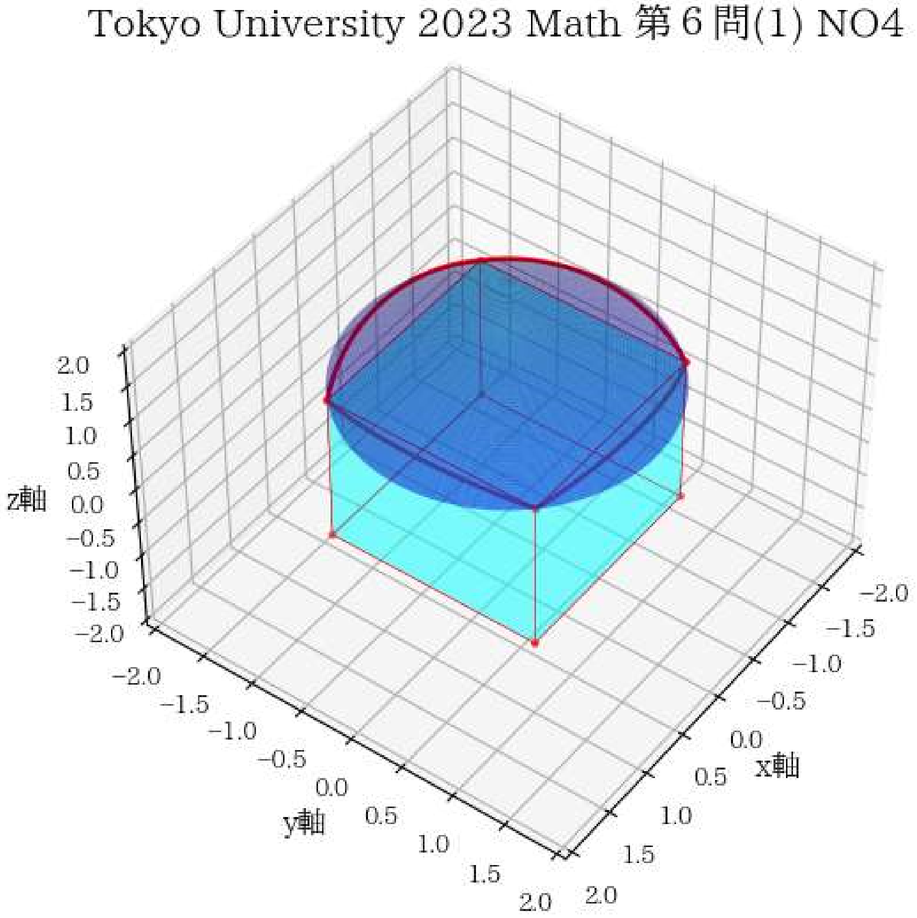
これは高校では習わない。

z 軸との偏角を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ にすると、球の上側、立方体の頂点までを表示できる。

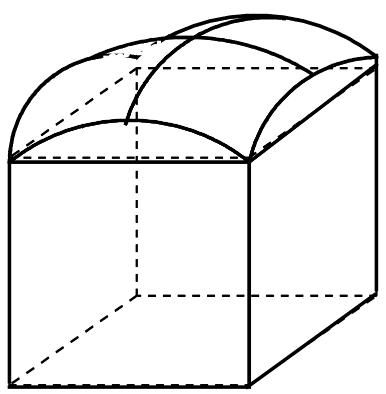
```
x,y,z=m_circle(ax,r,start_z_arg=−alpha,end_z_arg=alpha)
x,y,z=m_rotation(x,y,z,rot_vector=[np.pi/4,0,0])
ax.plot(x, y, z, color="r",lw=2)
for i in range(3):
   x,y,z=m_rotation(x,y,z,rot_vector=[0,0,np.pi/2])
   ax.plot(x, y, z, color="r",lw=2)

plt.show()
```

球面上にあって、 xy 平面とのなす角45° で、立方体の上面の頂点から頂点までの円弧を表示する。さらにその円弧を z 軸の回りに90°だけ回転させるのを３回繰り返す。すると最終的には４つの円弧が表示される。

［出力］



ようやく完成した図形である。円弧の下側の球面を削りたかったが、さすがに大変そうなので、この図形で満足してしまった。これは、予想した見取り図とほぼ同じであった。



見取り図

以上で第６問の解説は終わる。

※今年の東大の問題は昨年よりも難しかっただろう。入試問題の難易度は振り子のように、難易を繰り返すなら、来年は多少緩和されるかもしれない。それにしても、６題とも時間内に解けた受験生はいたのだろうか。いたのならば、まさに”Excellent”の一言に尽きる。