２０２２年度　東京大学　数学（理）
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

　東京大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説する。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムで解析が出来る箇所はプログラミングを試みる。

　難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに６題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、この解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、普通の人である著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

第　１　問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。

(2) $f(x)$ の区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

(1)　この問題は基本問題である。それ程難しいとは思わないが、微分･積分の基本的な計算力を知ることができる良問と思う。少なくともこの大学に入りたい人は、この問題は解けないといけないだろう。ポイントとして、関数の最大･最小の問題は、グラフの概形図を描いて、その一番上の点の y 座標が最大値で一番下の点の y 座標が最小値である、ということだけである。すなわち $y=f(x)$ のグラフをまず描いてみようと思う。その為には、三角関数や対数関数が混在した特殊関数を微分できないといけない。さらにその微分した結果を使って増減表を作ってグラフを描くが、増減表だけでも概形図は分かるので、少なくとも増減表は書けないといけない。微分積分は数学Ⅱの教科書に始めて習い、その

ときは整関数（最大４次関数まで）までではあるが、微分積分の基本的な概念は教わる。そして数学Ⅲになって、三角関数や対数関数などの特殊関数の微分積分に発展する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ⅲ（数研出版）－－－－－－－－－

三角関数の導関数の公式

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \log a$$

積の導関数

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

商の導関数

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

特に $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ここまで「数学Ⅲ（数研出版）」からの引用－－－

次に、問題文の $y = f(x)$ の中に積分の記号 $\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$ があるが、それを x で微分するとどうなるかは、数学Ⅱ（数研出版）の教科書に載っている。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ⅱ（数研出版）－－－－－－－－－

定積分と微分法

a が定数のとき，$\int_a^x f(t)\,dt$ は x の値を定めるとその値が定まるから，
x の関数である。この関数の導関数を求めてみよう。

関数 $f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると

$$F'(t) = f(t), \qquad \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

よって，$\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分すると，$F(a)$ は定数であるから

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

ゆえに，$\int_a^x f(t)\,dt$ は $f(x)$ の１つの不定積分で，次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{ただし } a \text{ は定数}}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ここまで「数学Ⅱ（数研出版）」からの引用－－－

要するに $\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$ を x で微分すると、$\cos x\cdot\log(\cos x)$ になる。これらを考慮して 問題文の$y=f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=-\sin x\cdot\log(\cos x)+\cos x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}+\sin x+\cos x\cdot\log(\cos x)$$
$$=(\cos x-\sin x)\cdot\log(\cos x)$$

次に増減表を作るために $f'(x)=0$ となる x の値を求めなければならない。そのとき、$\cos x-\sin x=0$ を解いても $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ で $x=\frac{\pi}{4}$ になるが、私は $\cos x-\sin x$ は合成しようと考える。何故なら、範囲が $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ になるのは珍しく、普通は $0\leqq x<2\pi$の範囲であり、そのときには三角関数を合成しなければならない。ここで合成の復習をしよう。

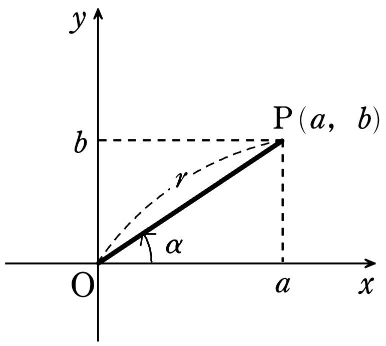
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ⅱ（数研出版）－－－－－－－－－

A　三角関数の合成

加法定理を用いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を変形してみよう。

座標$(a,\ b)$である点をPとし，動径OPと x 軸の正の向きとのなす角を α とする。また，線分OPの長さを r とすると

$$a=r\cos\alpha,\quad b=r\sin\alpha$$



よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta$
$$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)$$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ である。

$a\sin\theta+b\cos\theta$ のこのような変形を **三角関数の合成** という。

三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ここまで「数学Ⅱ（数研出版）」からの引用－－－

これより、$\cos x-\sin x=-(\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\log(\cos x)$$

ここで、$f'(x)=0$ とおくと、$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\cdots\cdots①$　または　$\log(\cos x)=0\cdots\cdots②$

①のとき　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$ なので、 $x = \dfrac{\pi}{4}$

②のとき　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　$0 < x \leqq 1$ なので、 $\cos x = 1$ すなわち $x = 0$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ は連続なので、増減表より $x = \dfrac{\pi}{4}$ で最小値を持つ。…（答）

以上が(1)の解答･解説であるが、解答としては僅か１０行、もう少し詳しく書いたとしても１５行ぐらいだと思う。ここの大学の入試問題としては簡単すぎやしないか、と不安になる。もしかして、 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において　$y = f(x)$ は連続である、という証明も必要なのかな、と考えたけど、 区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が連続ではない点が一切見つからないので連続である、としか言いようがないのではないかな、と思いやめた。が、もしかして $\displaystyle\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$ が区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で連続を示すために、これを実際に積分をさせたいのかもしれない。しかし(2)を見ると、この積分をしないと値が出せそうにもないので、積分は(2)で示すようにし、ここでは触れないことにした。

(2)　(1)より区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで(1)でときに考えたように $g(x) = \displaystyle\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$ とおいて、積分をしてみようと思う。これは部分積分を使う。部分積分は入試問題でよく出題されているので必須項目である。それに関する教科書の内容を以下に示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅲ（数研出版）」－－－－－－－－－

部分積分法

２つの関数の積の導関数については

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である。すなわち

$$f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)$$

両辺の不定積分を考えると，次の 部分積分法 の公式が成り立つ。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

例題　次の不定積分を求めよ。

$$\int x\log x\,dx$$

解　$\displaystyle\int x\log x\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$

$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}(\log x)'dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－ここまで「数学Ⅲ（数研出版）」からの引用－－－

この部分積分を使って$g(x)=\displaystyle\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt$を求めてみよう。

$$g(x)=[\sin t\cdot\log(\cos t)]_0^x-\int_0^x\sin t\cdot\frac{-\sin t}{\cos t}dt$$

$$=\sin x\cdot\log(\cos x)+\int_0^x\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt$$

ここで$\displaystyle\int\frac{1}{\cos t}dt=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt=\int\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)\frac{\cos t}{2}dt$

$$=\int\frac{1}{2}\left(\frac{\cos t}{1-\sin t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\{-\log(1-\sin t)+\log(1+\sin t)\}+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C$$ なので

$g(x)=\sin x\cdot\log(\cos x)+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\sin x$ となる。

これより $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\log\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}}-\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\log\sqrt{2}+1)+\log(\sqrt{2}+1)$$

①より最大値は $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\log\sqrt{2}+1)+\log(\sqrt{2}+1)$

$$=-\sqrt{2}\log\sqrt{2}-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)$$ ………（答）

※最初は（答）はもう少し綺麗になるかな、と思い、 $\log\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log 2$ としていろいろやってみたが、 $\log(\sqrt{2}+1)$ とをまとめることが出来ず、結局上の形が一番いいかな、ということで答えとした。実際の試験会場で私が受験生だったならば、この形ではかなり不安な思いで答えを書いたであろう。

それでは、この本の趣旨でもある、この問題をPythonを使って分析してみよう。

まず、答えが正しいかどうか、実際にPythonで計算して確かめてみる。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−tokyo_22_01_NO1−−−−−−−−−−−

```
import sympy as sym
import numpy as num
import math
x,t = sym.symbols("x t")
from sympy import sin, cos, log
gg = cos(t)*log(cos(t))                    # gg=cos t・log(cos t)
f1 = cos(x)*log(cos(x))−cos(x)+sym.integrate(gg,(t,0,x))
```

$\# f1=\cos x\cdot\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x \cos t\cdot\log(t)\,dt$

```
f1_v = f1.subs(x,num.pi/4)
```

$\# f1\_v=f1\left(\frac{\pi}{4}\right)$

```
f2_v = log(math.sqrt(2)+1)−math.sqrt(2)*(log(math.sqrt(2))+1)
```

$\# f2\_v=\log(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}\cdot(\log\sqrt{2}+1)$

```
print(f1_v)
print(f2_v)
```

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−python program−−−−−−−−−−−

出力結果

```
−1.02296904708783
−1.02296904708783
```

全く同じ値が出力された。答えはあっている、と一応確認された。

さらに　驚くことにPythonで積分もできる。それでは、$g(x)=\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$の積分を、PythonのSymPyを使ったらどうなるのか、をプログラミングしてみる。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−tokyo_22_01_NO2−−−−−−−−−−−

```
import sympy as sym
import numpy as num
import math
x,t = sym.symbols("x t")
from sympy import sin, cos, log
gg = cos(t)*log(cos(t))
Igg = sym.integrate(gg,(t,0,x))
print(Igg)
```

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−python program−−−−−−−−−−−

［出力］

```
−log(−tan(x/2)**2/(tan(x/2)**2 + 1) + 1/(tan(x/2)**2 + 1))*tan(x/2)**2/(tan(x/2)**2 + 1) + 2*log(−tan(x/2)**2/(tan(x/2)**2 + 1) + 1/(tan(x/2)**2 + 1))*tan(x/2)/(tan(x/2)**2 + 1) − log(−tan(x/2)**2/(tan(x/2)**2 + 1) + 1/(tan(x/2)**2 + 1))/(tan(x/2)**2 + 1) + 2*log(tan(x/2) + 1)*tan(x/2)**2/(tan(x/2)**2 + 1) + 2*log(tan(x/2) + 1)/(tan(x/2)**2 + 1) − log(tan(x/2)**2 + 1)*tan(x/2)**2/(tan(x/2)**2 + 1) − log(tan(x/2)**2 + 1)/(tan(x/2)**2 + 1) − 2*tan(x/2)/(tan(x/2)**2 + 1)
```

手計算で積分した $g(x)=\sin x\cdot\log(\cos x)+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\sin x$ の方が綺麗であり、仮に入試の答案に上の結果を導いた受験生がいたら〇になるのだろうか、と疑問に思うが、コンピュータでの出力結果は見づらいので、普通の表記に変換してみる。

$$g(x)=-\log\left\{-\frac{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\tan\left(\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1\right)}+\frac{1}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}\right\}\cdot\frac{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}$$

$$
+2\cdot\log\left\{-\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}+\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right\}\cdot\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}
$$

$$
-\frac{\log\left\{-\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}+\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right\}}{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}
$$

$$
+2\cdot\log\left\{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right\}\cdot\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}+2\cdot\frac{\log\left\{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right\}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}
$$

$$
-\frac{\log\left\{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)\right\}\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}-\frac{\log\left\{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)\right\}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}-2\cdot\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}
$$

このように変換したとしても答案に書いて〇になると思えない式である。これが正しいかどうかは、先のプログラムで示したように二つの計算結果は等しいので正しいとしか言えないだろう。それにしてもPython のライブラリSymPyはすごいと実感した。どのようなアルゴリズムで積分しているのか、大いに興味深い内容であるが、今はこれを作って無料で提供している天才に感謝するだけに留めよう。

次に、この関数のグラフを描画するプログラムを作成してみる。

```
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_01_NO2－－－－－－－－－－－
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title(”Tokyo University 2022 Math O1_NO2”, fontsize = 16)
ax.set_xlim(0,np.pi/2)
ax.set_ylim(−2,2)
ax.arrow(0,−2,0,3.9,head_width=0.1,head_length=0.1,fc=’k’,ec=’k’)
ax.arrow(−2,0,8.3,0,head_width=0.1,head_length=0.1,fc=’k’,ec=’k’)
ax.text(−0.2,1.7,’y’,fontsize=13)
ax.text(6,−0.2,’x’,fontsize=13)
ax.text(−0.25,−0.2,’O’,fontsize=13)
ax.grid(which=”major”,axis=”x”,color=”blue”,alpha=0.8,linestyle=”−−”,line
width=1)
```

```
ax.grid(which="major",axis="y",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",linewidth=1)
x = np.arange(0, np.pi/2, 0.0001)
y = np.cos(x)*np.log(np.cos(x))-np.cos(x)+np.sin(x)*np.log(np.cos(x))+1/2*(np.log(1+np.sin(x))-np.log(1-np.sin(x)))-np.sin(x)
```

$y=\cos x\cdot\log(\cos x)-\cos x+\sin x\cdot\log(\cos x)$

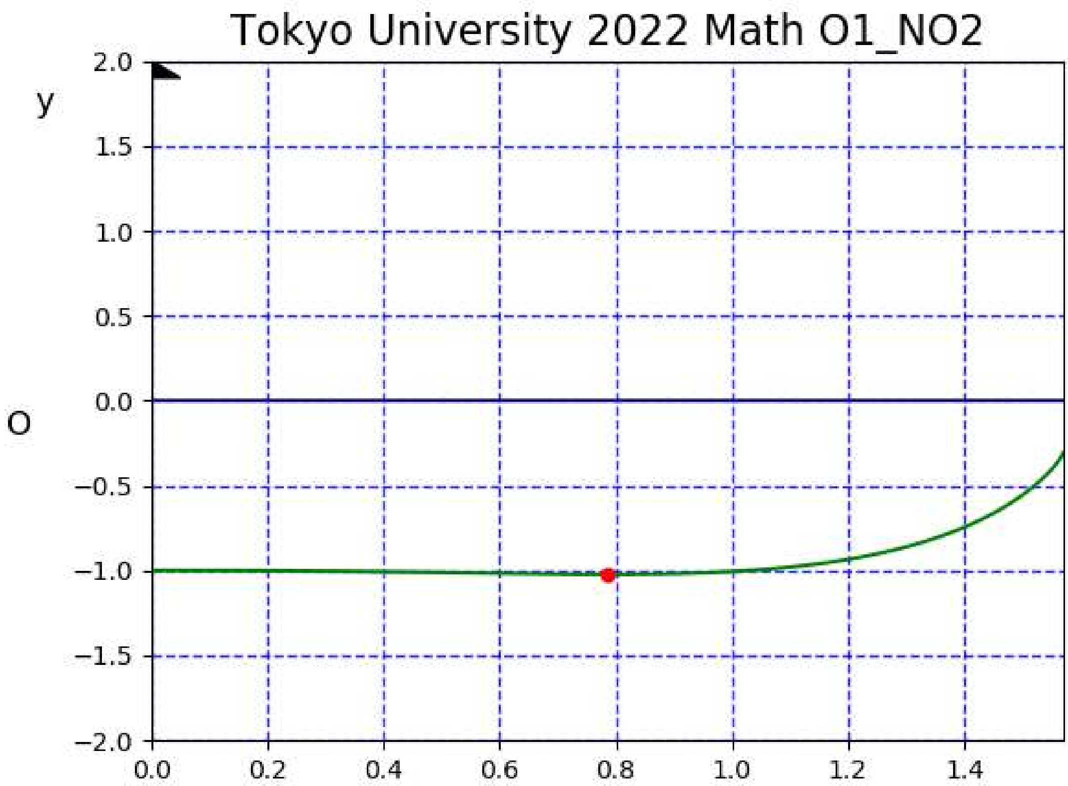
$\qquad +\frac{1}{2}\{\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\}-\sin x$

```
ax.plot(x, y, color = "green")
a = np.pi/4
b = np.cos(a)*np.log(np.cos(a))-np.cos(a)+np.sin(a)*np.log(np.cos(a))+1/2*(np.log(1+np.sin(a))-np.log(1-np.sin(a)))-np.sin(a)
ax.plot(a, b, marker='.',markersize=10,color = "red")
plt.show()
```

------------------------python program-----------

この出力結果が次の図である。

最初に実行したときは、プログラムをミスったか、と思うぐらい平坦な特徴のないグラフである。でもよくよく見ると、確かに $x=\frac{\pi}{4}$ のときに最小値を取っているのが分かる。



以上で第 1 問の解答･解説を終わる。

第　2　問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ。

(2) $k,\ n$ を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を $k,\ n$ を用いて表せ。

(3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。

⑴ これは、 $n=3m$ $(m=1,2,3,\cdots\cdots\cdots)$ のとき、 $a_n=5N$ $(N=1,2,3,\cdots\cdots\cdots$ を示せばよい、ということであり、この手の証明は数学的帰納法を使うのかな、と思う。
それでは、数学的帰納法の復習をしよう。数学Ｂの教科書に載っている。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ｂ（数研出版）」－－－－－－－－－
数学的帰納法
Ａ　数学的帰納法による等式の証明

数列 $\{a_n\}$ において，初項 a_1 と，a_k から a_{k+1} を求める規則とが与えられているとすると，すべての自然数 n について，a_n を定めることができる。これと似た考え方によって，自然数 n に関する等式や不等式がすべての自然数 n について成り立つことを証明する方法がある。例えば，次の等式を証明してみよう。

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$n=1$ のとき　　① の左辺$=1$，　　① の右辺$=1^2=1$
　よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。
[2]　<u>$n=k$ のとき ① が成り立つ</u>，すなわち

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2 \quad \cdots\cdots ②$$

　<u>と仮定する</u>。この仮定のもとに $n=k+1$ の場合を考えると，② から

$$\begin{aligned} ①\text{ の左辺} &= 1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} \\ &= k^2+\{2(k+1)-1\}=k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 = ①\text{ の右辺} \end{aligned}$$

　よって，<u>$n=k+1$ のときにも ① が成り立つ</u>ことがわかる。

　[1] から，$n=1$ のとき ① は成り立つ。このことと [2] から，$n=1+1$ すなわち $n=2$ のときにも ① は成り立つ。

更に，$n=2$ のとき ① が成り立つことと [2] から，$n=2+1$ すなわち
$n=3$ のときにも ① は成り立つ。

同様に $n=4$，5，6，…… のときにも ① は成り立ち，結局すべての自然数 n について ① は成り立つ。

上に述べたような証明法を 数学的帰納法 という。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ｂ（数研出版）」からの引用－－－

それではこの数学的帰納法を使って、(1) を解いてみよう。

［結論］$n=3m$ $(m=1,2,3,\cdots)$ のとき、 $a_n=5N$ $(N=1,2,3,\cdots)$ ………①が成り立つ

［証明］

[1] $m=1$ のとき、 $n=3$ となり、 $a_1=1$、 $a_{n+1}={a_n}^2+1$ から

$$a_2=1^2+1=2$$

$$a_3=2^2+1=5$$ となり①は成り立つ。

[2] $m=k$ のとき、 $n=3k$ となり、$a_{3k}=5N$ $(N=1,2,3,\cdots)$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} a_{3k+1}&={a_{3k}}^2+1\\ &=25N^2+1\\ a_{3k+2}&={a_{3k+1}}^2+1\\ &=(25N^2+1)^2+1 \end{aligned}$$

ここで $(25N^2+1)^2=625N^4+50N^2+1=5N'+1$ とおくと

$$\begin{aligned} a_{3k+2}&=5N'+2\\ a_{3k+3}&={a_{3k+2}}^2+1\\ &=(5N'+2)^2+1\\ &=25N'^2+20N'+5\\ &=5N'' \end{aligned}$$

以上より $m=k+1$ のときも $a_{3k+3}=5N''$ となって①は成り立つ。

[1] [2] から数学的帰納法によって、すべての自然数 n について①は成り立つ。 終

以上が(1) の解答･解説であるが、これも解けなければならない問題だろう。しかし、何を期待して作った問題なのか、この段階ではまだ分からない。

(2) この問題は全くとらえどころがない。

a_n が a_k の倍数となる、ということは $a_n>a_k$ であり、これを添字 n、 k の関係にしないといけない。つまり、 $n>k$ ということであるから、 $n=k+l$ とはなるだろう。これと漸化式 $a_{n+1}={a_n}^2+1$ との両方をじっと見る。ここで、私の思考過程を示す。

$a_{k+1}={a_k}^2+1$ より a_{k+1} を a_k で割った余りは 1 、すなわち a_1 である。

次に 、$a_{k+2}={a_{k+1}}^2+1$ であり、 a_{k+2} を a_k で割った余りを考える。

ここで、数学Ａで習った商と余りの関係（合同式）を思い出した。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ａ（数研出版）」－－－－－－－－－

研究　**割り算の余りの性質**

一般に，m を正の整数とし，2 つの整数 a，b を m で割ったときの余りを，それぞれ r，r' とすると，次のことが成り立つ。

1　$a+b$ を m で割った余りは，$r+r'$ を m で割った余りに等しい。
2　$a-b$ を m で割った余りは，$r-r'$ を m で割った余りに等しい。
3　ab を m で割った余りは，rr' を m で割った余りに等しい。
4　a^k を m で割った余りは，r^k を m で割った余りに等しい。

例 1　15^{100} を 7 で割った余りを求める。
15 を 7 で割った余りは 1 である。
よって，15^{100} を 7 で割った余りは，1^{100} を 7 で割った余りに等しい。したがって，15^{100} を 7 で割った余りは 1 である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ａ（数研出版）」からの引用－－－

つまり、 $a_{k+2}=a_{k+1}{}^2+1$ なので、 a_{k+2} を a_k で割った余りは $a_1{}^2+1$ となる。さらに $a_{k+3}=a_{k+2}{}^2+1$ で、 a_{k+3} を a_k で割った余りは $(a_1{}^2+1)^2+1$ になるが、展開しても綺麗には当然ならない。これを繰り返したら訳分からなくなってしまうのは一目瞭然である。かなり悩んだ。果たしてどうするか。試験会場だったらかなり焦るだろう。

そのとき、 漸化式から$a_1{}^2+1=a_2$となることにふっと気付いた。 これならいける、と確信した。つまり、次の余りは $a_2{}^2+1=a_3$ となり、 これを繰り返すと少なくとも余りは a_m の形になる。 これで解けた、と嬉しくなった。つまり、 a_{k+2} を a_k で割った余りは a_2、 a_{k+3} を a_k で割った余りは a_3、これを繰り返すと、 a_{k+l} を a_k で割った余りは a_l になると予想される。

要するに、 $n=k+l$ とおくと、 a_n を a_k で割った余りは a_l ………①となる。これは、数学的帰納法で証明すべきであるが、ここでは割愛する。

このことから、 a_n が a_k の倍数になるためには、a_k で割った余り a_l が 0 または a_k の倍数にならなければならない、ということである。つまり $n=2k=k+k$ のとき、 a_k で割った余り はa_kとなるので、 a_n が a_k の倍数になる。次に $n=3k=k+2k$ のとき、 a_k で割った余り a_{2k} となり、さらに a_{2k} を a_k で割った余りはa_kとなるので、 a_n が a_k の倍数になる。

これを繰り返すと、 n が k の倍数のとき、a_n は a_k の倍数になる。
これも数学的帰納法で証明が必要かもしれないけど、出題者はそこまで要求していないのではないか、と勝手な判断をして先に進める。

次に、a_n が a_k の倍数のとき 、n が k の倍数 になることを示すが、これは対偶を使って証明する。つまり、n が k の倍数 でないならば、a_n が a_k の倍数にはならない、を示す。

n が k の倍数 ではないので、$n=k+l$ とおくと l は k で割り切れなく、その余りを r とおくと、①より a_{k+l} を a_k で割った余りは 最終的にa_r となる。$0<r<k$ なので、$0<a_r<a_k$ となり、a_n は a_k の倍数にはならない。よって、 この対偶である「a_n が a_k の倍数のとき 、n が k の倍数となる」は成り立つ。

以上より、a_n が a_k の倍数になる必要十分条件は、n が k の倍数になることである。

かなり苦しい答案になってしまった。合同式を使えばすっきりとしたものに書き換えられるかな、と考えたが、結局、合同式を駆使した答案は、何が言いたいのか分からなくなるのでは、と思いやめた。もし私が実際に試験会場で受けたならば、上のような答案として提出するだろう。でも、果たして何点になるのだろうか。完璧ではないが、少なくとも間違ってはいないと思う。

(3)　$8091=2022\times4+3$なので 、まず(2) から a_{8091} を a_{2022} に割った余りは a_3 となる。(1) から $a_3=5$ である。要するに $a_{8091}=a_{2022}\cdot q+5$ (q は自然数)………① となる。また、2022 は 3 の倍数なので、(1) から a_{2022} は 5 の倍数となる。これから①の右辺は5で括りだせるので a_{8091} は 5 の倍数となる。さらに $8091=3^2\cdot29\cdot31$ 、 $2022=2\cdot3\cdot337$ なので、(2) から a_{8091} と a_{2022} との共通の素因数は $a_3=5$ だけである。

ここで、(1) の証明の中で、
$$\begin{aligned}a_{3k+3}&={a_{3k+2}}^2+1\\&=(5N'+2)^2+1\\&=25N'^2+20N'+5\end{aligned}$$
とあるが、これは、正の整数 n が 3 の倍数のとき、a_n は 5 の倍数となるが、 25 の倍数にはならないことも示している。

よって、a_{2022} と$(a_{8091})^2$ の共通の素因数は 5 だけであり、その最大公約数は 5 である。

以上で第２問の解答解説は終わる。次にpythonで分析してみる。

$a_1=1$　$a_{n+1}={a_n}^2+1$ だけを使って a_{2022} と a_{8091} の値を求めようかな、と最初は思ったが、当然ながら値が莫大な数になって、数時間プログラムを流しても出力されないだろうと予想される。それで下のプログラムでの処理時間を測ってみた。ちなみに、私のパソコンは、Windows10（ CORE i5） でちょっと前のものである。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_02_NO1－－－－－－－－－－－

```
import math
from time import time
```

```
def speed_func(k):
   start = time()
   a=[]
   j=1
   a.append(0)
   for i in range(1,k+1):
      a.append(j)
      j=(j*j+1)
   lap_time = time() − start
   return lap_time

while True:
   try:
      j=int(input("j= "))
      break
   except ValueError:
      print("整数を入力")

for k in range(j+1):
   time_a = speed_func(k)
   print(f'a[{k:d}]の処理時間は{time_a:.3f}秒です')
```

$a_{n+1}=a_n{}^2+1$ の漸化式を使って、 $a_1=1$ から初めて、実行時に入力された j の値まで繰り返し計算し、それをリスト a に追加するメインプロセス

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−python program−−−−−−−−−

このプログラムの出力結果の途中までを表示したのが下である。 a_{29} のときで501.13秒、これは約８分21秒。これをもし a_{2022} まで計算したらどのぐらいかかのるだろうか。しょっと計算してみたくなった。 a_{24} に 2.084 秒掛かっていて、それから約３倍で次の a_{25} の処理時間 6.342秒となる。これから a_{2022}までに掛かる時間は 約$2.084\cdot 3^{1998}$ 秒になる。これが約何年になるのか、Pythonを使って計算してみよう。まず、近似値をとって整数にする。小数のままだと、オーバーフローしてしまうから整数にする。
$2.084\cdot 3^{1998}\fallingdotseq 2\cdot 3^{1998}$ 秒は約何年になるのか計算する。すると約 10^{946} 年である。
10^{12} が１兆になるので、少なくとも私、いや高校生も含めて私たちが生きている間には計算は終わらない、ということである。このような問題に興味を持ったExcellentな高校生がいたなら、是非とも $P\fallingdotseq NP$ 予想という未解決問題を勉強して、100万ドルの懸賞金をゲットしてほしい。

```
a[22]の処理時間は0.210秒です
a[23]の処理時間は0.678秒です
a[24]の処理時間は2.084秒です
a[25]の処理時間は6.342秒です
a[26]の処理時間は19.801秒です
a[27]の処理時間は55.176秒です
a[28]の処理時間は166.093秒です
a[29]の処理時間は501.134秒です
```

次に、少なくと a_{2022} を5で割った余りが0になることをPythonを使って検証してみよう。先に述べたように実際に a_{2022} の値は計算が出来ない。その為には、数学の手法を使って余りだけを使って計算してみよう。

> $a_{n+1}={a_n}^2+1$ なので、 a_n を5で割った余りを r とおくと、 a_{n+1} を5で割った余りは r^2+1 を5で割った余りに等しい。

これを使って下記のようなプログラムを作成した。

```
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_02_NO2－－－－－－－－－－－
while True:
  try:
    k=int(input(”第何項までですか。k=”))
    q=int(input(”割る数は何ですか。q= ”))
    break
  except ValueError:
    print(”整数を入力”)
j=1
for i in range(1,k+1):
  print(f’a[{i:d}] を {q:d} で割った余りは {j:d}’)
  j=(j*j+1)%q
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－
```

このプログラムの実行し、第2022項までを5で割った余りとして、その出力結果の最後だけ表示したのが左図で、 25で割った余りを表示したのが右図である

```
a[2014] を 5 で割った余りは 1
a[2015] を 5 で割った余りは 2
a[2016] を 5 で割った余りは 0
a[2017] を 5 で割った余りは 1
a[2018] を 5 で割った余りは 2
a[2019] を 5 で割った余りは 0
a[2020] を 5 で割った余りは 1
a[2021] を 5 で割った余りは 2
a[2022] を 5 で割った余りは 0
```

```
a[2014] を 25 で割った余りは 1
a[2015] を 25 で割った余りは 2
a[2016] を 25 で割った余りは 5
a[2017] を 25 で割った余りは 1
a[2018] を 25 で割った余りは 2
a[2019] を 25 で割った余りは 5
a[2020] を 25 で割った余りは 1
a[2021] を 25 で割った余りは 2
a[2022] を 25 で割った余りは 5
```

この結果から、まず a_{2022} は5で割り切れるが25では割り切れない。次に、 a_{8091} も同じように検証すると a_{2022} は5で割り切れるが25では割り切れないことが分かった。

次に (2) の検証を してみたいと思う。 n が k の倍数になる、ならば、 a_n は a_k の倍数になる。その逆も成り立つ、というのをどうやって検証すればよいのだろうか、と頭を悩ます。少なくとも $a_{n+1}=a_n{}^2+1$ を使って具体的に a_n の値を求めないと検証が出来ないが、先ほど述べたようにa_{25} 、つまり 25 個ぐらいまでが、値を短時間で求められて使える限界ということである。という ことは、 20 ぐらいのまでの数で検証するプログラムをまず作ってみよう思う。それを以下に示す。その出力結果を全てをここに載せるには紙面の無駄使いと思ったので、今回は 12 と 15 と 18 を使うことにした。他の数は、皆様が是非ともプログラムをコピーして実行してほしい。ちょっとした驚きがあると思う。コンピュータが自由に使えなかった時代では、このような検証も高価なものだったのだろう。そんな検証をしなくたって、数学的に証明されたんだから無意味じゃないかな、と言われてコンピュータの使用は断られたのだろう。でも、証明したものが目で見えるという経験もある種の驚きがあって必要と思うが、どうだろうか。今は自由にコンピュータが使えて幸せである。が、もっと高度な内容で、今度はスーパーコンピュータを使いたい人もいることだろう。使用料がたとえ高価なものでも、そういう人たちに気軽に使えるような研究・設備を是非とも提供してほしいものである、と未来の日本の発展を夢見る人のぼやきが入ってしまったが、先に進めよう。

検証内容

a_{12} は a_1 、 a_2 、a_3、 a_4、a_6 、a_{12} の値では割りきれるが、それ以外では余りがある。

a_{15} は a_1 、a_3、a_5、a_{15} の値では割りきれるが、それ以外では余りがある。

a_{18} は a_1 、a_2、a_3、a_6 、a_9、a_{18} の値では割りきれるが、それ以外では余りがある。

というものを検証してみる。その為に次のようなプログラムを作成した。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_02_NO3－－－－－－－－－－－

```
while True:
  try:
    k=int(input("第何項を調べますか。k="))
    break
  except ValueError:
    print("整数を入力")
a=[]
j=1
a.append(0)
for i in range(1,k+1):
  a.append(j)
  j=(j*j+1)
for i in range(1,k+1):
  print(f'a[{k:d}] を a[{i:d}] で割った余りは {a[k]%a[i]:d}')
```

―――――――――――――――――――――――――python program―――――――――

［出力］

```
第何項を調べますか。k＝12
a[12] を a[1] で割った余りは 0
a[12] を a[2] で割った余りは 0
a[12] を a[3] で割った余りは 0
a[12] を a[4] で割った余りは 0
a[12] を a[5] で割った余りは 2
a[12] を a[6] で割った余りは 0
a[12] を a[7] で割った余りは 677
a[12] を a[8] で割った余りは 26
a[12] を a[9] で割った余りは 5
a[12] を a[10] で割った余りは 2
a[12] を a[11] で割った余りは 1
a[12] を a[12] で割った余りは 0
```

```
第何項を調べますか。k＝15
a[15] を a[1] で割った余りは 0
a[15] を a[2] で割った余りは 1
a[15] を a[3] で割った余りは 0
a[15] を a[4] で割った余りは 5
a[15] を a[5] で割った余りは 0
a[15] を a[6] で割った余りは 5
a[15] を a[7] で割った余りは 1
a[15] を a[8] で割った余りは 210066388901
a[15] を a[9] で割った余りは 458330
a[15] を a[10] で割った余りは 677
a[15] を a[11] で割った余りは 26
a[15] を a[12] で割った余りは 5
a[15] を a[13] で割った余りは 2
a[15] を a[14] で割った余りは 1
a[15] を a[15] で割った余りは 0
```

```
第何項を調べますか。k＝18
a[18] を a[1] で割った余りは 0
a[18] を a[2] で割った余りは 0
a[18] を a[3] で割った余りは 0
a[18] を a[4] で割った余りは 2
a[18] を a[5] で割った余りは 5
a[18] を a[6] で割った余りは 0
a[18] を a[7] で割った余りは 26
a[18] を a[8] で割った余りは 2
a[18] を a[9] で割った余りは 0
a[18] を a[10] で割った余りは 44127887745906175987802
a[18] を a[11] で割った余りは 210066388901
a[18] を a[12] で割った余りは 458330
a[18] を a[13] で割った余りは 677
a[18] を a[14] で割った余りは 26
a[18] を a[15] で割った余りは 5
a[18] を a[16] で割った余りは 2
a[18] を a[17] で割った余りは 1
a[18] を a[18] で割った余りは 0
```

余りが 0 の添え字は元の添え字の約数になっているのが確認できる。つまり、n が k の倍数になる、ならば、a_n は a_k の倍数になる、が見て分かる。

さらに、n が k の倍数にならない、ならば、a_n は a_k の倍数にはならない、というのも確認できる。すなわち、この対偶である、a_n が a_k の倍数になる、ならば、n が k の倍数になる、も確認できる。すなわち(2) の証明が実際目で見えた形になって表れた、ということである。

この結果が出力されたとき、すごい問題を創ったものだ、と感動し問題を作成された方に敬意を表したい気持ちで一杯になった。漸化式 $a_{n+1}=a_n{}^2+1$ は非常に面白い数列である。以上で、第２問の解答･解説は終わる。

第　３　問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $S(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A(3, 0), B(3, 3) を考える。さらに，次の条件 (i), (ii) をともに満たす点 P をとる。

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。
(ii) 点 P は，3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii), (iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。
(iv) 点 Q は，4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

この問題は、まず書いている内容を理解して図に描くことができるか、というものと思う。それにしても⑴は簡単過ぎるが、高校１年生に解かせて、おっ、東大の問題を解けたんじゃないか、すごいね、と自信を付けさせるのも一つの手だろう。第１問から第３問までの⑴の小問は簡単である。今までは、⑴の意味を理解するのが難しく、それが解ければ⑵、⑶と流れるように解けるのが普通だった気がする。それがこのような形に変わったのは、基礎･基本の力を重視していたセンター試験から、応用力を試している共通テストに移行したので、個別試験（２次試験）で基礎力を見ているのだろうか、と穿った見方をしてしまう。それでは⑴の解答･解説を始めよう。

⑴ 点 $S(x_1, y_1)$、点 $T(x_2, y_2)$ に対し、点 S が点 T から十分離れているとは、

$|x_1 - x_2| \geqq 1$　または　$|y_1 - y_2| \geqq 1$　であるが、「または」という論理記号は勘違いが多い。このときは、この否定を考えた方がよいだろう。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅰ（数研出版）」－－－－－－－－－

$A \cup B$，$A \cap B$ の補集合について，次の法則が成り立つ。

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

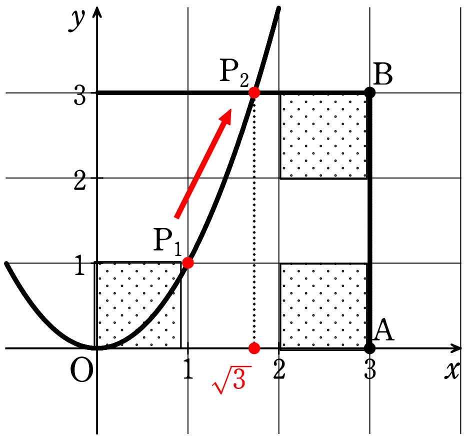
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅰ（数研出版）」からの引用－－－

要するに、点 S が点 T から十分離れていないとは、$|x_1 - x_2| < 1$　かつ　$|y_1 - y_2| < 1$

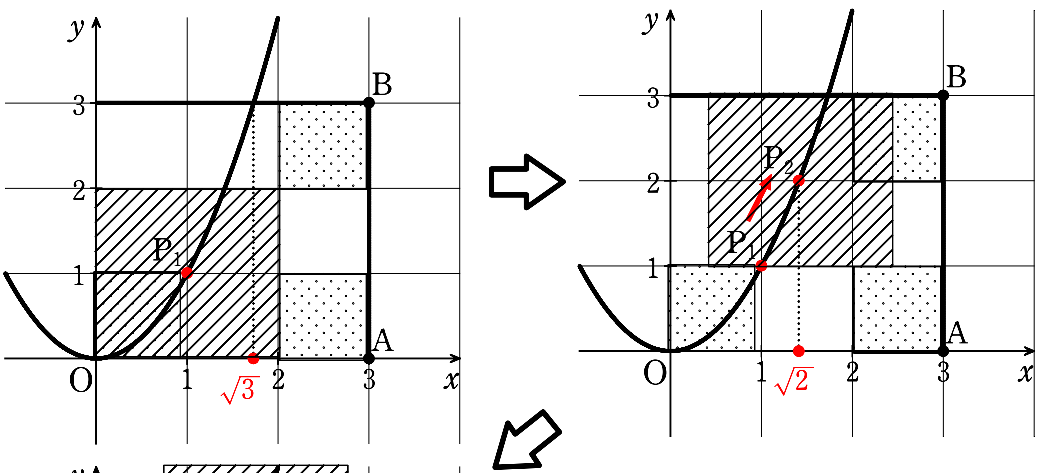
このことを頭に置きながら、問題文を図に描いてみる。

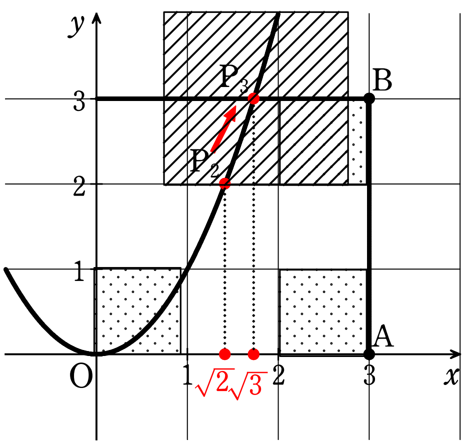
条件を満たす点 P の動く範囲は、右図の点 P_1 から点 P_2 の範囲である。

よって　$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ ………（答）



(2) これも図を描いて考える問題のようである。





点 P を動かしてみて、点 Q の存在する範囲が変わる点 P の位置を考えたとき、上右図の点 P_2 の位置である。このときの点 P_2 の座標は y 座標が 2 となるので、その座標は $(\sqrt{2}\ ,2)$ となる。そして、(1) から $a = \sqrt{3}$ までが最終的な図形になる。

以上からら場合分けを考えると、

（i）$1 \leqq a < \sqrt{2}$

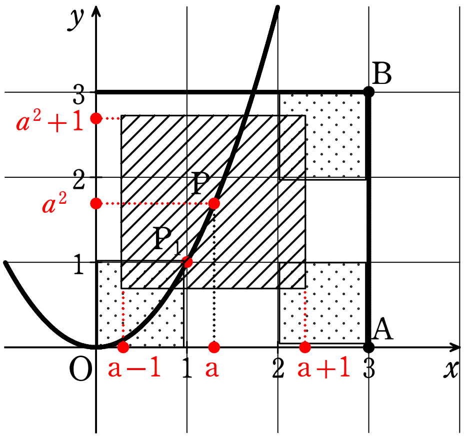
（ii）$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$　の２通りである。

（i）$1 \leqq a < \sqrt{2}$ のとき

図より

$$f(a) = (3-a^2-1)\cdot 2 + (a-1)(a^2+1-1) + (3-a-1)\cdot 1 + (a^2-1)\cdot 1$$

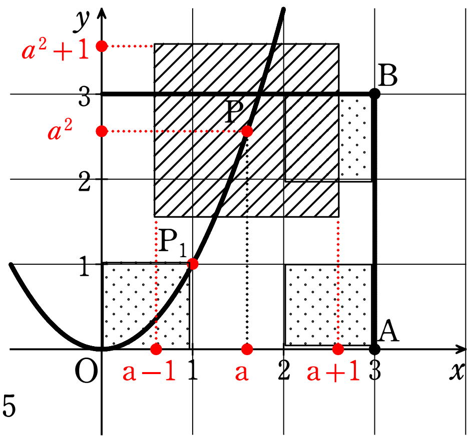
$$f(a) = a^3 - 2a^2 - a + 5$$



（ii）$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$$f(a) = (a-1)\cdot 2 + (a^2-2)\cdot 2 + 1\cdot 1 + (3-a-1)\cdot 1$$

$$= 2a^2 + a - 3$$



以上から

（答）$\begin{cases} 1 \leqq a < \sqrt{2} \text{のとき} & f(a) = a^3 - 2a^2 - a + 5 \\ \sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3} \text{のとき} & f(a) = 2a^2 + a - 3 \end{cases}$

(3) 最小にする a の値を求めるために、 $f(a)$ の増減表を作ろうと思う。

（i）$1 \leqq a < \sqrt{2}$ のとき　$f(a) = a^3 - 2a^2 - a + 5$

$$f'(a) = 3a^2 - 4a - 1 = 3\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \quad \text{頂点}\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

さらに、 $f'(1) = -2 < 0$ 、$f'(\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - 1 = 5 - 4\sqrt{2} = \sqrt{25} - \sqrt{32} < 0$

これらより　$1 \leqq a < \sqrt{2}$ のとき $f'(a) < 0$

また $\displaystyle\lim_{a \to \sqrt{2}} f(a) = \lim_{a \to \sqrt{2}} (a^3 - 2a^2 - a + 5) = 1 + \sqrt{2}$

（ii）$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき　$f(a) = 2a^2 + a - 3$

$$f'(a) = 4a + 1$$

これより　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき　$f'(a) > 0$　また $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$

（i）(ii)より

a	1	…	$\sqrt{2}$	…	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$-$		$+$	
$f(a)$		↘	$1+\sqrt{2}$	↗	

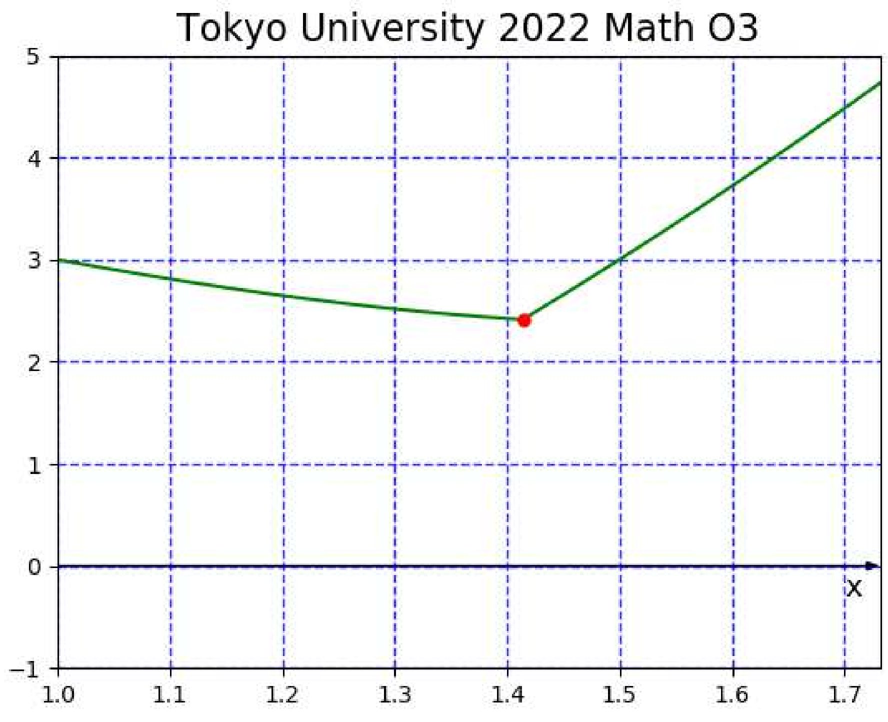
この増減表より $a = \sqrt{2}$ のとき　最小値 $1 + \sqrt{2}$ をとる。………(答)

それでは第３問をPythonで分析する。どのように分析しようか、といろいろ考えてみた

が、 $f(a)$ のグラフを描くことぐらいしか思いつかなかった。軸の設定などの箇所は第１問と同じなのでここでは省略する。

```
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_03_NO1－－－－－－－－－
x = np.arange(1, np.sqrt(2), 0.0001)
y = x**3－2*x**2－x＋5
ax.plot(x, y, color = "green")
x = np.arange(np.sqrt(2), np.sqrt(3), 0.0001)
y = 2*x**2＋x－3
ax.plot(x, y, color = "green")
a = np.sqrt(2)
b = 2*a**2＋a－3
ax.plot(a, b, marker='.',markersize=10,color = "red")
plt.show()
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－
```

［出力］



第３問の出題の狙いは何なのだろうか。それ程難しくはない。むしろ基本的な問題と思うが、問題文を的確に理解し、それを数式で表すことができるか、という趣旨なのかもしれない。取りあえず、これで第３問の解答・解説は終わる。

第　4　問

座標平面上の曲線

$$C:\quad y = x^3 - x$$

を考える。

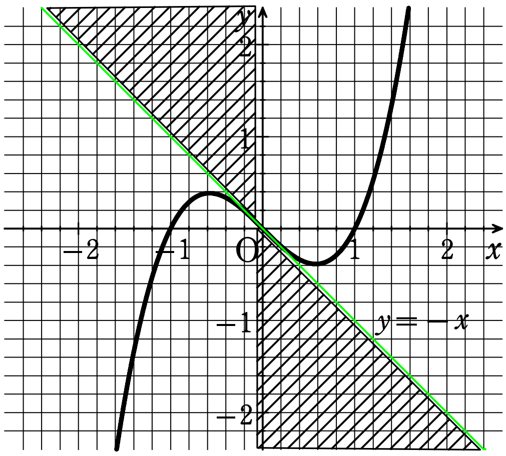
(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。

(i) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

この問題を見て最初に思ったのは、点 P と原点を結んだ直線は ほぼ 3 点で交わりそうだ、ということである。しかし、右図の斜線部分の範囲に点 P が存在した場合は、原点を通る直線の交点は原点だけになってしまう。それでは、場合分けをして証明しようかとも考えたが、結局、斜線部分の範囲にある点 P から 3 点で交わる直線の存在が全ての範囲に使える、ということで次の答案になった。



(1)

証明　点 $P(a\,,b)$　$a\,,b$ は全ての実数 とおく。
点 P を通り傾き m の直線 l の式は
$y-b=m(x-a)$ すなわち $l: y=mx-ma+b$……① となる。
命題は、①の直線 l が曲線 $C: y=x^3-x$……② と異なる 3 点で交わる傾き m が $a\,,b$ の値に関わらず存在することを示せばよい。
すなわち①と②から方程式 $x^3-x=mx-ma+b$……③ が $a\,,b$ の値に関わらず異なる 3 個の実数解を持つ m の値が存在することである。
③の方程式をまとめると　$x^3-(m+1)x+ma-b=0$
ここで $f(x)=x^3-(m+1)x+ma-b$……④ とおくと、④のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わることと③の方程式が異なる 3 個の実数解を持つことと同値である。

$f'(x)=3x^2-(m+1)$ より④のグラフを少なくとも 2 つの極値を持たねばならないので、 $f'(x)=0$ となる 2 つの異なる実数解が必要である。そのため少なくと も$m>-1$ と

ならねばならなく、その値は $x=\pm\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$ である。

さらに、④は最高次数の係数が正の３次関数なので、極大値 $f\left(-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)$、極小値 $f\left(\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)$となる。④の３次関数が x 軸と異なる３点で交わる必要十分条件は $f\left(-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)<0$ となればよい。

※ここで $f\left(-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)$ や $f\left(\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\right)$ の計算は $x^3-(m+1)x+ma-b$ を

　$3x^2-(m+1)$ で割って、その余りの x に $-\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$ などを代入する。

$$\{x^3-(m+1)x+ma-b\}\div\{3x^2-(m+1)\}=\frac{1}{3}x\{3x^2-(m+1)\}-\frac{2}{3}(m+1)x+ma-b$$

これより

$$\begin{aligned}f\left(-\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)\cdot f\left(\sqrt{\frac{m+1}{3}}\right)&=(ma-b)^2-4\left(\frac{m+1}{3}\right)^3\\&=-\frac{4}{27}m^3+\left(a^2-\frac{4}{9}\right)m^2-\left(\frac{4}{9}+2ab\right)m+b^2-\frac{4}{27}\end{aligned}$$

これは m の３次関数であり、 a , b の値に関わらず、この関数の値が負になる m は必ず存在する。

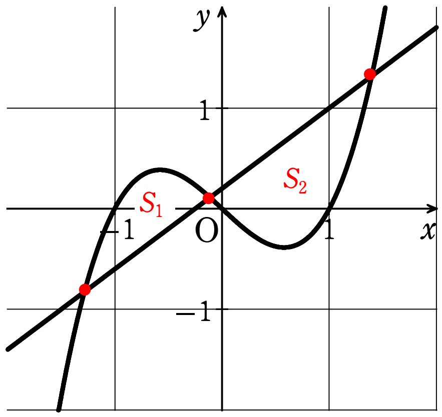
　以上より　点 P を通る直線で傾き m を　$m>-1$　かつ

　$-\dfrac{4}{27}m^3+\left(a^2-\dfrac{4}{9}\right)m^2-\left(\dfrac{4}{9}+2ab\right)m+b^2-\dfrac{4}{27}<0$ となる m の値すなわち を十分大きな値 m をとした直線　$l: y=mx-ma+b$は 必ず存在し、この直線は曲線 C と異なる３点で交わる。終

⑵ この問題は答えはすぐに分かるが、それを証明するのは大変だな、と思う。つまり、原点に関して対称な３次関数なので、直線と囲まれる２つの部分の面積が等しくなるのは、原点を通る直線でしかありえないだろう、ということである。だが、これを証明しないで答えだけで、果たして点数はくれるのだろうか。私が採点者なら満点は当然やらないが、ある程度の点数は与えるが、果たしてこの大学の教授はどうなんだろうか。一応、ここでは証明をしよう。直線との交点の x 座標を 小さい順にα、 β 、 γ とおいて、面積が等しくなるので、 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(\text{曲線ー直線})dx=\int_\beta^\gamma(\text{直線}-\text{曲線})dx$ とするのが分かりやすいが、原点に関して対称な関数なので$\displaystyle\int_\alpha^\gamma(\text{曲線}-\text{直線})dx=0$ でも同じ意味になる。このどちらかを解くと$\beta=0$ になることを示す。計算は、後半の方が積分が１回で済むので楽そうである。

証明

直線 $y=mx+n$ ……①　曲線 $C: y=x^3-x$……② が異なる３点で交わるとし、その交点の x 座標を α、β、γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とおく。
さらに、曲線と直線が囲まれた部分をそれぞれ S_1、S_2 とおく。



$S_1=S_2$ なので $S_1-S_2=0$ すなわち $\int_\alpha^\gamma(②-①)dx=0$

ここで ②−①＝0 の解が α、β、γ なので
②−①$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$とおける。

これより $\int_\alpha^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx=0$ となる。

$$左辺=\int_\alpha^\gamma\{x(x-\alpha)(x-\gamma)-\beta(x-\alpha)(x-\gamma)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma\{(x^2-\alpha x)(x-\gamma)-\beta(x-\alpha)(x-\gamma)\}dx$$

$$=\left[\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\alpha x^2\right)(x-\gamma)\right]_\alpha^\gamma-\int_\alpha^\gamma\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\alpha x^2\right)dx+\frac{1}{6}\beta(\gamma-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\alpha^3(\alpha-\gamma)-\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}\alpha x^3\right]_\alpha^\gamma+\frac{1}{6}\beta(\gamma-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\alpha^3(\alpha-\gamma)-\left(\frac{1}{12}\gamma^4-\frac{1}{6}\alpha\gamma^3\right)+\left(\frac{1}{12}\alpha^4-\frac{1}{6}\alpha^4\right)+\frac{1}{6}\beta(\gamma-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}(\alpha^4-\gamma^4)-\frac{1}{6}\alpha\gamma(\alpha^2-\gamma^2)+\frac{1}{6}\beta(\gamma-\alpha)^3$$

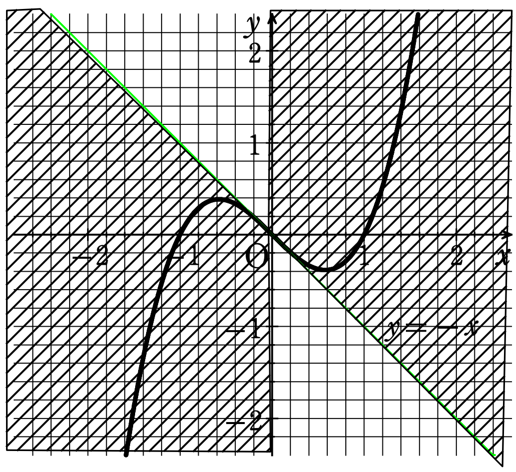
$$=(\alpha^2-\gamma^2)\left(\frac{1}{12}\alpha^2+\frac{1}{12}\gamma^2-\frac{1}{6}\alpha\gamma\right)+\frac{1}{6}\beta(\gamma-\alpha)^3=(\alpha-\gamma)^2\left\{\frac{1}{12}(\alpha^2-\gamma^2)-\frac{1}{6}\beta(\alpha-\gamma)\right\}$$

$$=(\alpha-\gamma)^3\left(\frac{1}{12}\alpha+\frac{1}{12}\gamma-\frac{1}{6}\beta\right)=\frac{1}{12}(\alpha-\gamma)^3(\alpha+\gamma-2\beta)$$

左辺＝0より $\alpha\fallingdotseq\gamma$ なので $\alpha+\gamma=2\beta$……③

さらに、α、β、γ は方程式 $x^3-(m+1)x-n=0$ の解なので、
解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=0$……④
③、④より $\beta=0$ となり、このことから、
面積が等しくなる直線は必ず原点を通る。
すなわち $n=0$ となる。

次に 、$y=mx$ と $y=x^3-x$ が異なる３点で交わる必要十分条件は (1) より$m>-1$ のときである。
よって、直線 $y=mx$ で曲線Dと異なる３つの交点の存在範囲が求める領域となり、右図の斜線部分が求める領域である。



ただし、 境界線上の点で、原点以外はすべて
　　　　含まれない。

以上が(2) の解答である。

次にPythonを使って解析してみようと思ったが、この条件を満たす領域を図示するプログラムはかなり面倒であり、作れるかどうかも分からない。たとえ出来たとしても結果は同じになるので面白さに欠けるだろう。そこで、ここではPythonのライブラリで数式処理ができるSymPyを使って積分してみようと思う。コンピュータでの処理と言えば、数値処理だけだと勘違いしていた私にとって、数式のまま処理できるSymPyは衝撃のライブラリである。手計算では面倒だった $\int_{\alpha}^{\gamma}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$ の積分をしてみよう。

```
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_04－－－－－－－－－
import sympy as sym
import numpy as num
from IPython.display import display
sym.init_printing()
a,b,c,x = sym.symbols("a b c x")
ff = (x－a)*(x－b)*(x－c)
f1 = sym.integrate(ff,(x,a,c))
display("積分した結果をそのまま出力￥n",f1)
display("積分した結果を展開して出力￥n",sym.expand(f1))
display("積分した結果を因数分解して出力￥n",sym.factor(f1))
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－
```

［出力］

```
積分した結果をそのまま出力
 －a**4/4 － a**3*(－a/3 － b/3 － c/3) + a**2*b*c － a**2*(a*b/2 + a*c/2 +
 b*c/2) － a*b*c**2 + c**4/4 + c**3*(－a/3 － b/3 － c/3) + c**2*(a*b/2 + a
*c/2 + b*c/2)
積分した結果を展開して出力
 a**4/12 － a**3*b/6 － a**3*c/6 + a**2*b*c/2 － a*b*c**2/2 + a*c**3/6 +
b*c**3/6 － c**4/12
積分した結果を因数分解して出力
 (a － c)**3*(a － 2*b + c)/12
```

出力結果はAnacondaにあるJupyter Noteを使ったら、もっと綺麗に出力される。プログラムも Jupyter Note用にdisplay()コマンドを使用して作成している。しかし、VSC（Visual Studio Code）というソフトウェア開発ツールを使っている場合は、出力は上記のようになる。プログラムに慣れている人にとっては見慣れた表現であるが、それでも一見して分かる式ではない。そこで、Jupyter Noteで出力した結果をスクリーンショットで次に示す。

```
In [7]: import sympy as sym
        import numpy as num
        from IPython.display import display
        sym.init_printing()
        a,b,c,x = sym.symbols("a b c x")
        ff = (x-a)*(x-b)*(x-c)
        f1 = sym.integrate(ff,(x,a,c))
        display("積分した結果をそのまま出力",f1)
        display("積分した結果を展開して出力",sym.expand(f1))
        display("積分した結果を因数分解して出力",sym.factor(f1))
```

'積分した結果をそのまま出力'

$$-\frac{a^4}{4} - a^3\left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3}\right) + a^2bc - a^2\left(\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}\right) - abc^2 + \frac{c^4}{4} + c^3\left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{c}{3}\right) + c^2\left(\frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}\right)$$

'積分した結果を展開して出力'

$$\frac{a^4}{12} - \frac{a^3b}{6} - \frac{a^3c}{6} + \frac{bc}{2}a^2 - \frac{ab}{2}c^2 + \frac{ac^3}{6} + \frac{bc^3}{6} - \frac{c^4}{12}$$

'積分した結果を因数分解して出力'

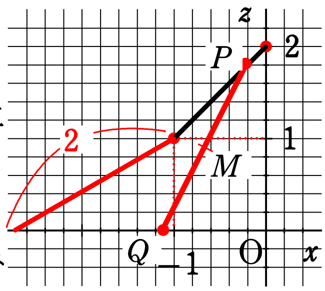
$$\frac{1}{12}(a-c)^3(a-2b+c)$$

私は最後の結果を見て驚いた。まず$\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$を計算しようとしたとき、全て展開して、その後積分をして、上端、下端を代入し、それをまとめ上げる、というプロセスもあるな、と考えた。が、計算がかなり面倒な気がした。それならば、部分積分法と公式$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$を組み合わせた方法の方が簡単だろう、ということで先に述べたような解答をした。しかし、Pythonでの出力結果から予想すると、Python（SymPy）は単純に展開して積分しているようである。そして、その式を因数分解した形にまとめることもできている。さらに、その結果は手計算でした形と全く同じであった。驚きである。このプログラムにに費やした時間は、考えながらコンピュータに打ち込んで、実行して表示するまで、約５分ぐらいしか掛からなかった。要するに複雑なアルゴリズムを一切考える必要がなく、単にSymPyというライブラリに積分したい式を渡すだけのプログラムで積分から因数分解までをしてしまう。手計算で積分するのとコンピュータを使って積分するのを、「用意、ドン」で競争した場合、圧倒的にコンピュータを使ってした方が勝ちであろう。

将来、数学の入試は、紙と鉛筆とパソコンとなるかもしれない。大学側または会社側として、優秀な人材を確保したいならば、自由にパソコンを使いこなせる人の方が研究や仕事への能力が高いのではなかろうか。もしそうなった場合、パソコンは備え付けのもので、MacかWindowsかLinuxかを選べるようにして、ネットには繋げず、中に入っているアプリケーションはOfficeとPython（Anaconda）だけでどうだろうか。

第　5　問

座標空間内の点 A(0, 0, 2) と点 B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ＝2 を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。



まず空間図形の問題は、問題文を読んで図のイメージがつかめるかどうかが、解けるかどうかの分かれ目であろう。左図は、xz 平面での断面図である。問題文を読みながら大多数の受験生はまずこの図を描いて、どのように解くかを考えたであろう。私もそうである。

この図から、まず xz 平面だけで考えるとどうなるか試してみようとした。つまり、点 $P(t\,,t+2)$ 、点 $Q(\,s\,,0\,)$ とおくとどうなるだろうか、と考えた。

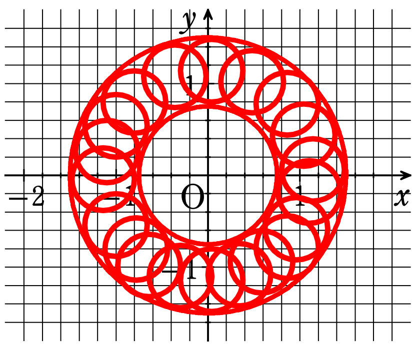
$PQ=2$ より $\sqrt{(t-s)^2+(t+2)^2}=2$ 、点 $M(\,x\,,z\,)$ とおくと、 $\begin{cases} x=\dfrac{t+s}{2}\cdots\cdots① \\ z=\dfrac{t+2}{2}\cdots\cdots② \end{cases}$

これらから、 x と z の関係式を求めると $(2z-x-2)^2+z^2=1$ という 2 次曲線になってしまい、途方に暮れてしまった。

それじゃ、縦に切って駄目なら横に切ろうということで、 xy 平面に平行で点 M を通る平面で切ろうと考えた。さっきとは逆にして点 $M(\,x\,,y\,,k\,)$ 、点 $P(\,p\,,q\,,2k)$ とおく。すると点 $Q(\,2x-p\,,2y-q\,,0\,)$ となる。ここで、$PQ=2$ なので

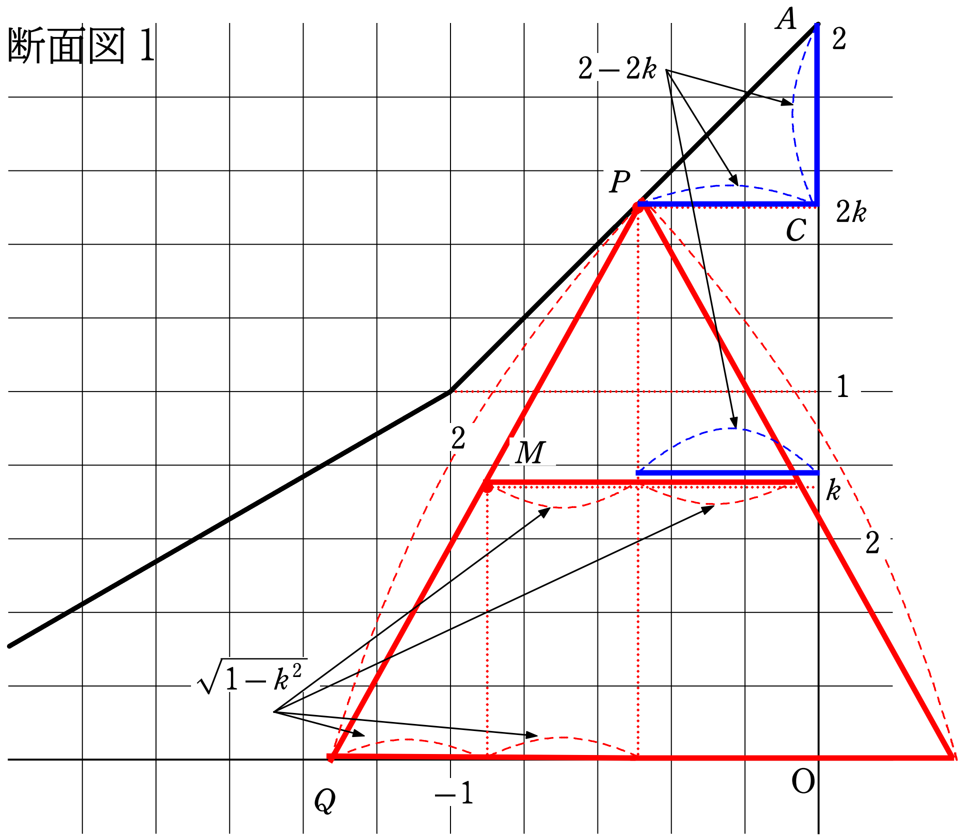
$\sqrt{(2x-p-p)^2+(2y-q-q)^2+(2k)^2}=2$ すなわち $(x-p)^2+(y-q)^2=1-k^2$ となる。

点 M の存在範囲から $\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ となり、この式 xy 平面においては中心 $(\,p\,,\,q\,)$ 、半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円となる。これで解けそうだな、と確信した。しかし、果たしてどのような図形になるのだろうか。上から見た図を予想してみたのが次の図である。



ドーナッツの形状になるだろうと予想する。何故なら中心 $(\,p\,,q\,,0\,)$ は点 P の座標であり、点 P を固定して長さ 2 がである線分 PQ の点 Q の軌跡は図から考えても円になるのは明らかであるが、これを式で表して証明するのは難しそうであるが、何とかしてドーナッツの形状になるのをここでは示してみる。でも、本番のときは私ならば、このような証明は抜きにして、図でも描いてごまかすだろう。満点は貰えないかもしれないが、ある

程度の点数はゲットできるのでは、と期待しながら答案を書くと思う。
下図は、 xy 平面に垂直で z 軸を含む平面で切った断面図である。



先に述べたように、点 $M(x, y, k)$、点 $P(p, q, 2k)$ とおくと点 $Q(2x-p, 2y-q, 0)$ となり、 $PQ=2$ から、$(x-p)^2+(y-q)^2=1-k^2$……①となる。
でも、これだけだと、点 P は何処にあってもよく、単に線分 PQ の長さ 2 という条件を満たすだけである。つまり①だけの式だとドーナッツの形になる、ということを示すことはできない。果たして、点 P が曲面 S 上にある、という条件をどうするか、ここでしばし考えた。点 P が上図の線分上にある条件、それは、図の $\triangle APC$ が二等辺三角形である、ということである。つまり、 線分PC＝線分ACとなればよい。
すると上図から、 $OQ=\sqrt{4-4k^2}+PC=2\sqrt{1-k^2}+2-2k$ であり、さらに、
$OQ=\sqrt{(2x-p)^2+(2y-q)^2}$ なので、

$$(2x-p)^2+(2y-q)^2=\left(2\sqrt{1-k^2}+2-2k\right)^2$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(y-\frac{q}{2}\right)^2=\left(\sqrt{1-k^2}+1-k\right)^2 \cdots\cdots ② \text{ となる。}$$

①を展開すると $x^2+y^2-2(px+qy)+p^2+q^2=1-k^2$

②を展開すると $x^2+y^2-(px+qy)+\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{q^2}{4}=1-k^2+2(1-k)\sqrt{1-k^2}+(1-k)^2 \cdots ②'$

この上下を引いてまとめると

$$-(px+qy)+\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2=-2(1-k)\sqrt{1-k^2}-(1-k)^2$$

$px+qy=\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2+2(1-k)\sqrt{1-k^2}+(1-k)^2$

この式を再度②′に代入してまとめると

$x^2+y^2=\frac{1}{2}(p^2+q^2)+1-k^2+4(1-k)\sqrt{1-k^2}+2(1-k)^2$

ここで、$PC=\sqrt{p^2+q^2}$ 、 $AC=2-2k$ なので、 $p^2+q^2=(2-2k)^2$となる。
これを代入すると

$x^2+y^2=1-k^2+4(1-k)\sqrt{1-k^2}+4(1-k)^2$

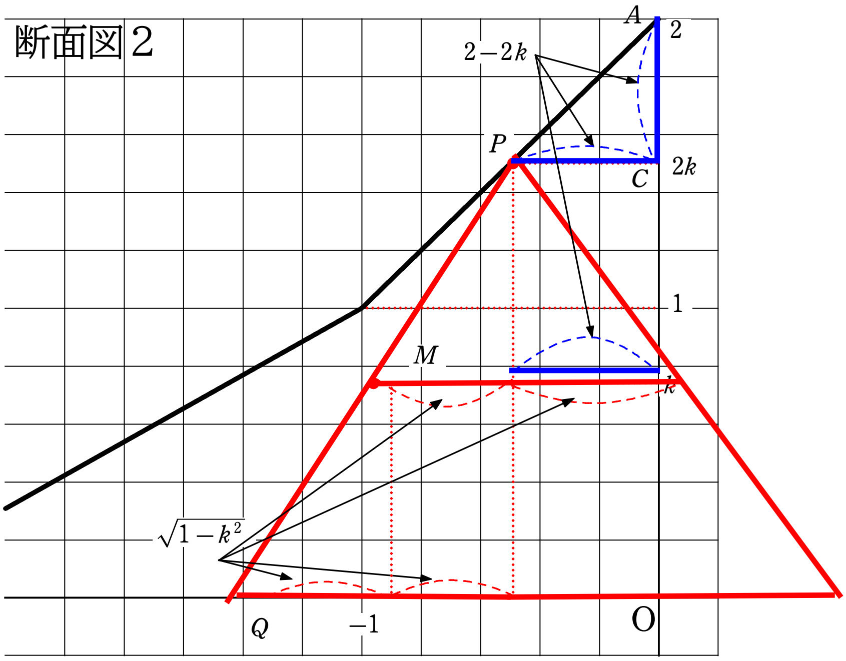
$x^2+y^2=(\sqrt{1-k^2}+2-2k)^2$

これは中心が原点、半径 $\sqrt{1-k^2}+2-2k$ の円となる。
これと断面図１から、点 P を固定し点 Q を動かしたとき、点 Mの軌跡は、中心 (p,q)、半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円となり、点 P の z 座標だけを固定し 平面 S上を動かしたとき、 点 M の軌跡は、中心 が原点、半径 $\sqrt{1-k^2}+2-2k$ の円となる。以上から、平面 $z=k$ における点 M が通る図形はドーナッツの形となる。
これらから、このドーナッツ形の面積を k で表し、これが平面 $z=k$ で切ったときの断面積になるので、この面積を $k:\frac{1}{2}\to1$で定積分をすれば K の体積が求まる。

断面図１から、ドーナッツの内側の円の半径は　$2-2k-\sqrt{1-k^2}$

ドーナッツの外側の円の半径は　$2-2k+\sqrt{1-k^2}$ となる。

しかし、このとき内側の円の半径が負になってはいけない。 $1\leqq2k\leqq2$ より $\frac{1}{2}\leqq k\leqq1$である。 $2-2k-\sqrt{1-k^2}\geqq0$ を解くと $k\leqq\frac{3}{5}$ となり、ドーナッツの形状になるのは $\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{3}{5}$ のときだけである。それでは、ここで $\frac{3}{5}\leqq k\leqq1$ のときを考える。



断面図２から、外側の円の半径は $2-2k+\sqrt{1-k^2}$ であるが、中点 M が通過する範囲は外側の円より小さい。つまり、はみ出した部分の面積を引かなければならない。はみ出した部分の面積の半径は $\sqrt{1-k^2}-(2-2k)$ となり、結局、ドーナッツの内側の円の面積と同じになる。

このことから、$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ における平面 $z=k$ で切ったときの断面積は

$S(k)=\left(2-2k+\sqrt{1-k^2}\right)^2\pi-\left(2-2k-\sqrt{1-k^2}\right)^2\pi=8\pi(1-k)\sqrt{1-k^2}$ となる。

さらに、$1\leqq 2k\leqq 2$ より $\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ なので、求める体積は $V=\int_{\frac{1}{2}}^{1} S(k)dk$ である。

$$V=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-k)\sqrt{1-k^2}\,dk=8\pi\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk-\int_{\frac{1}{2}}^{1}k\sqrt{1-k^2}\,dk\right\}$$

ここで $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk$ の積分を復習しよう。これは基本問題であり、半径１の円を利用しても求められるが、ここでは $\sin\theta$ を使って積分をする。

$k=\sin\theta$ とおくと　$dk=\cos\theta\,d\theta$

k	$\frac{1}{2}\longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

次に $\int_{\frac{1}{2}}^{1}k\sqrt{1-k^2}\,dk$ の積分をしよう。

$1-k^2=u$ とおくと　$-2kdk=du$

k	$\frac{1}{2}\longrightarrow 1$
θ	$\frac{3}{4}\longrightarrow 0$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}k\sqrt{1-k^2}\,dk=\int_{\frac{3}{4}}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{3}{4}}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって、求める体積 $V=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-k)\sqrt{1-k^2}\,dk=8\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$$=8\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\,\pi \cdots\cdots（答）$$

それでは第５問をPythonを使って分析しよう。やはり、最初は上の定積分の答えがあっているか、と言うよりも、Pythonでの結果と同じになるかどうか、調べてみる。

In [28]:
```
import sympy as sym
import numpy as num
from fractions import Fraction
from IPython.display import display
sym.init_printing()
k = sym.symbols("k")
ff = 8*sym.pi*(1-k)*sym.sqrt(1-k**2)
f1 = sym.integrate(ff,(k,0.5,1))
f2 = Fraction(4,3)*sym.pi**2-2*sym.sqrt(3)*sym.pi
display("積分した結果をそのまま出力",f1)
display("上の結果を計算して出力",float(f1))
display("手計算で積分した結果を出力",f2)
display("上の結果を計算して出力",float(f2))
```

'積分した結果をそのまま出力'

$-5.55849671753095\pi+2\pi^2$

'上の結果を計算して出力'

2.2766763493805042

'手計算で積分した結果を出力'

$-2\sqrt{3}\pi+\frac{4\pi^2}{3}$

'上の結果を計算して出力'

2.2766763493805042

驚くことに、Pythonでの出力結果と手計算でのそれとでは、形がまるっきり違う。$-5.5584\pi+2\pi^2$ と $-2\sqrt{3}\,\pi+\frac{4\pi^2}{3}\fallingdotseq-3.4641\pi+\frac{4}{3}\pi^2$ である。明らかに違う。しかし、両者の近似値としての計算結果は同じである。それは何故なのか。それを考えた。まず $8\pi\int(1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ の不定積分をPythonで求めた。

In [31]:
```
import sympy as sym
import numpy as num
from fractions import Fraction
from IPython.display import display
sym.init_printing()
x,k = sym.symbols("x k")
ff = 8*sym.pi*(1-k)*sym.sqrt(1-k**2)
f1 = sym.integrate(ff,(k,x))
f2 = Fraction(4,3)*sym.pi**2-2*sym.sqrt(3)*sym.pi
display("不定積分した結果をそのまま出力",f1)
```

'不定積分した結果をそのまま出力'

$$8\pi\left(-\frac{x^2}{3}\sqrt{-x^2+1}+\frac{x}{2}\sqrt{-x^2+1}+\frac{1}{3}\sqrt{-x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{asin}(x)\right)$$

次に、手計算での不定積分を求めてみた。途中は定積分のときと同じなので省略するが、その結果は以下である。

$$V(x)=8\pi\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)=8\pi\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{3}u\sqrt{u}\right)$$

ここで $\sin\theta=x$ 、 $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$ 、$u=1-x^2$、さらに $\theta=\arcsin x$ （これは高校では習わないが単に $\sin\theta=x$ の逆関数で、 $\theta=\sin^{-1}x$ と書く場合もある）となる。これらを代入すると

$$V(x)=8\pi\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=8\pi\left(-\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)$$

まさに、Pythonでの答えと同じになった。

これを使って $x:\frac{1}{2}\longrightarrow 1$ の定積分を計算した場合、 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ と $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ なので、 π^2 の係数は $\frac{4}{3}$ にしかならないと思うが、Pythonでの計算では 2 になっている。それでも両者の近似値は同じである。これはPython（SymPy）がどのような手順で定積分を計算しているかを調べないと分からないので、考察はここでやめることにした。

それでは次に $x^2+y^2=(\sqrt{1-k^2}+2-2k)^2$ のグラフをPythonで描いてみよう。

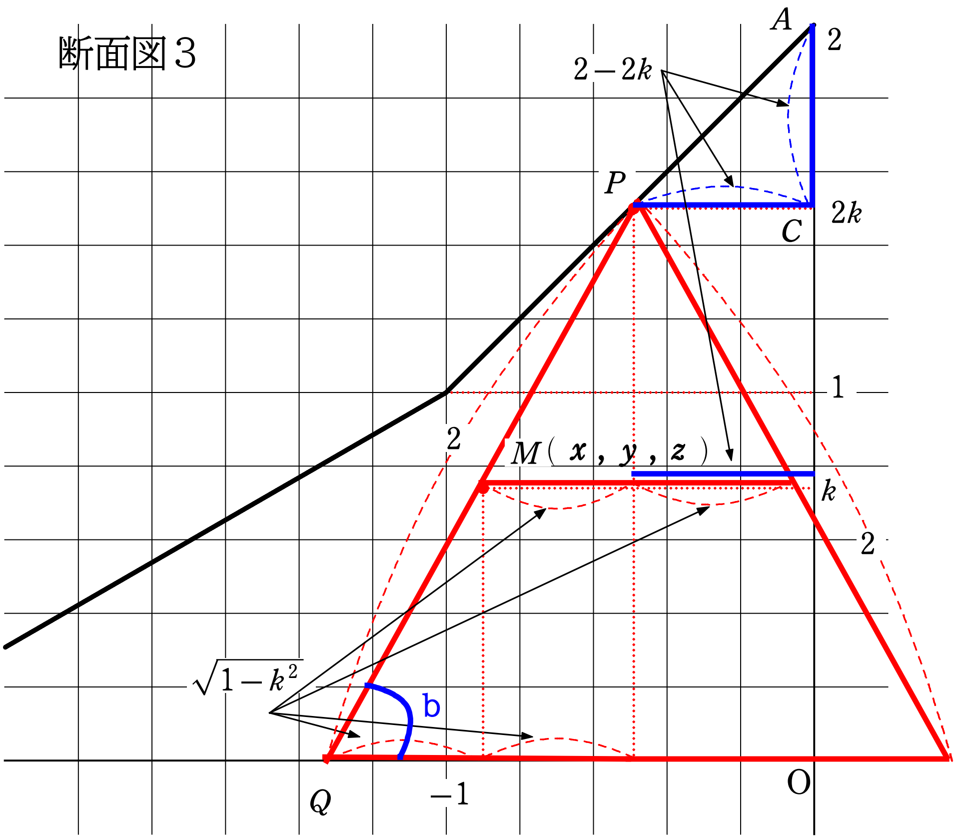
プログラムで関数を描く基本として、 $y=f(x)$ の形ならば、 x に適当な値を代入して y を求め、その点 (x, y) を座標平面上にプロットすれば図が描ける。簡単である。しかし、$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 等のような関数は、 $y=f(x)$ の形にして描くのは非常に面倒である。

そこで、これらの形を媒介変数表示（極形式）で表すのがプログラムの基本である。$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ は楕円の方程式（陰関数）であるが、これは $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$ として表され、θ に適当な値を代入して点 (x, y) の値を求めて図に描けばよい。

つまり、 xy 平面においては $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ 、空間においては $\begin{cases}x=r\cos\alpha\cos\beta\\y=r\cos\alpha\sin\beta\\z=r\cos\alpha\end{cases}$ が媒介変数表示の基本の形である。

それでは、この問題をPythonで描いてみよう。かなり大変な作業である。

まず、 ドーナッツの外側の円 $x^2+y^2=(\sqrt{1-k^2}+2-2k)^2$ を描いてみようと思うが、ここで $z=k$ である。空間図形である。先に述べた媒介変数の基本として $x\ y\ z$ を２つの角度 a と b を使って表してみる。まず xy 平面に投影した直線と原点とのなす角を a とおく。次に直線と z 軸とのなす角を b と置くのが基本であるが、ここでは、直線 PQ と xy 平面とのなす角を b とおく（断面図３参照）。



ここで $z=\sin b$ となり、外側の円の半径 $2-2z+\sqrt{1-z^2}=2-2\sin b+\cos b$

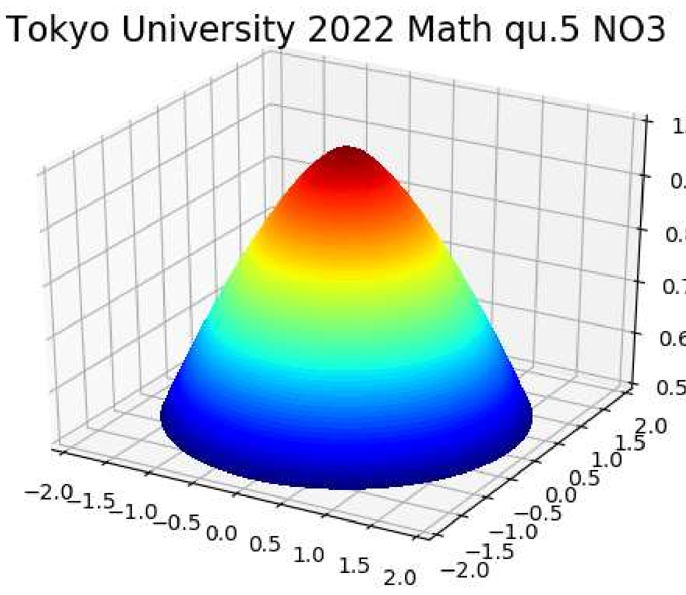
これから、$\begin{cases} x=(2-2\sin b+\cos b)\cos a \\ y=(2-2\sin b+\cos b)\sin a \end{cases}$ となる。これを使ってドーナッツの外側の円を表示するプログラムを作成した。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−tokyo_22_05_NO3−−−−−−−−−−−

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.set_title("Tokyo University 2022 Math qu.5 NO3", fontsize = 16)
a = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
b = np.linspace(np.pi/6, np.pi/2, 100)
x = np.outer(2-2*np.sin(b)+np.cos(b), np.cos(a))
y = np.outer(2-2*np.sin(b)+np.cos(b), np.sin(a))
z = np.outer(np.sin(b),np.ones(np.size(a)))
ax.plot_surface(x, y, z,cmap="jet",color="red",rcount=100, ccount=100, antial
iased=False)
plt.show()
```

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−python program−−−−−−−−−−−

［出力］

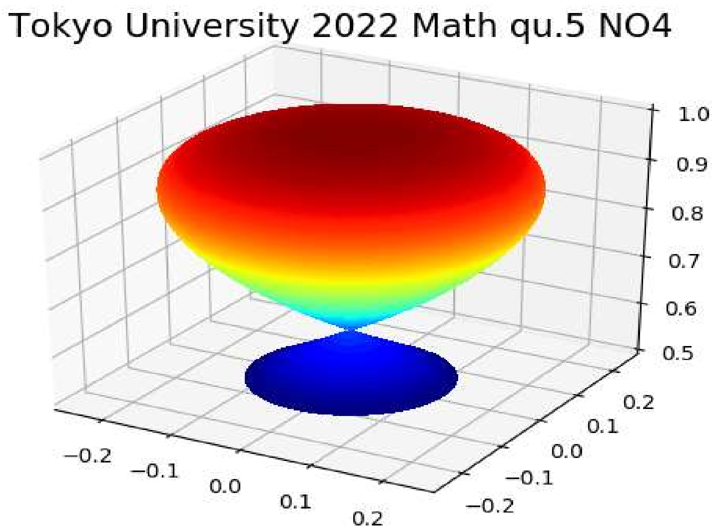


次にドーナッツの内側の円がどうなるのか、上のプログラムを変更して実行した。

変更箇所　10行目　x = np.outer(−2+2*np.sin(b)+np.cos(b), np.cos(a))

11行目　y = np.outer(−2+2*np.sin(b)+np.cos(b), np.sin(a))

［出力］



なかなか面白い結果である。確かに 計算通り0.6 のところで０になっている。この図を見ると内側の円の方が大きそうに見えるが、 x 軸 y 軸の目盛りが異なるだけで、上の図の中にすっぽりと下の図が収まるはずである。でも、気になるので、次のプログラムを作

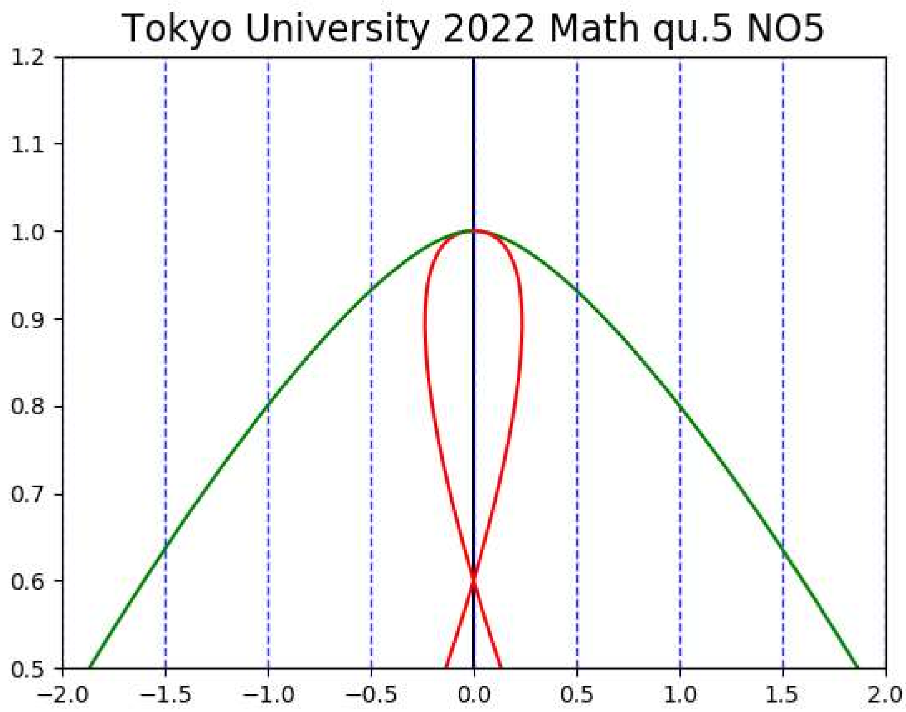
成して，確認した。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－tokyo_22_05_NO5－－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
import sympy as sym
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title(”Tokyo University 2022 Math qu.5 NO5”, fontsize = 16)
# ここにあった座標平面の設定は省略します
x = np.linspace(0.5,1,1000)
z1 = 2−2*x+np.sqrt(1−x**2)
z2 = 2−2*x−np.sqrt(1−x**2)
z3 = −z1
z4 = −z2
ax.plot(z1 ,x , color = ”green”)
ax.plot(z2 ,x , color = ”red”)
ax.plot(z3 ,x , color = ”green”)
ax.plot(z4 ,x , color = ”red”)
plt.show()
```

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－python program－－－－－－－－－－－

［出力］



緑がドーナッツの外側で赤が内側である。以上で第５問の解説は終わる。

第　6　問

O を原点とする座標平面上で考える。 0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3}, \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots\cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。 ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N = 8$ とする。 X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N = 200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

数学の大学入試問題は、短いほど難解で、長ったらしい文章は理解してしまえば簡単である、というのが定説である。この問題は、６問の中で一番文章が長く、ベクトルの問題かと思って読み進めると、最終的には確率の分野の問題であるのが分かった。果たして何を言っているのだろうか。まず、$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3}, \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$ は何か、を考える。このベクトルは、始点が原点にあり、半径１の円周上にその終点があり、さらにその終点は 円を $\frac{2}{3}\pi$ すなわち 120° に３分割する。そのベクトルを足して、最終的に終点の座標が原点になるパターンを考えさせているようである。それも、コインが裏のときには点は移動させず、表が出たときに、それまで出てきた裏の回数によって点が移動する、ということである。要するに、ベクトルと確率の融合問題である。

それでは、ここでベクトルの基本事項を復習しよう。

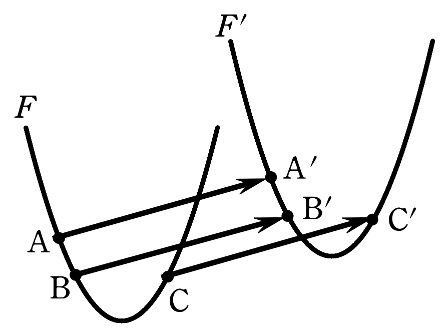
ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー数学Ｂ（数研出版）ーーーーーーーーー

１　平面上のベクトル

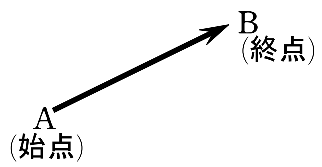
○　有向線分とベクトル

長さや質量のような量は，それぞれ量の単位を定めておくと，その単位で測った数値だけで表される。これに対して，例えば，風の吹き方は，北東の風秒速 15 m というように，向きと大きさで表される。向きと大きさで表される量には，速度のほかに，力や加速度などがある。

また，平面上の平行移動によって，図形 F が図形 F' に移されるとき，この平行移動も，移動の向きと距離によって定まる。右の図の場合，平行移動は，矢印のついた線分 AA′，BB′ などで表される。

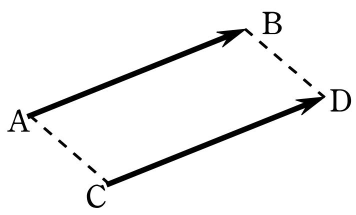


図のように，向きを指定した線分を **有向線分** という。有向線分 AB において，A をその **始点**，B をその **終点** という。また，線分 AB の長さを，有向線分 AB の大きさ，または長さという。



有向線分は位置と，向きおよび大きさで定まる。その位置を問題にしないで，向きと大きさだけで定まる量を **ベクトル** という。

したがって，右の図のように，位置は違うが，向きが同じで大きさが等しい有向線分 AB と有向線分 CD は，ベクトルとしては，同じものを表す。

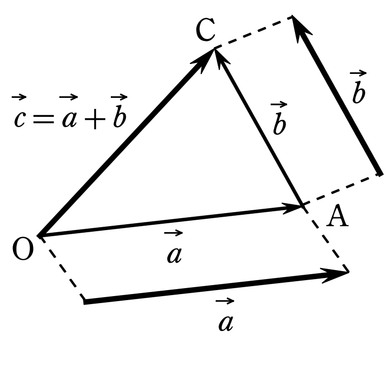


○　ベクトルの加法

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があるとき，1 点 O を任意に定めて

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる点 A，C をとり，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を考える。この $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ で表す。



すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

上の定義は，点 O のとり方に無関係である。

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーここまで「数学Ｂ（数研出版）」からの引用ーーー

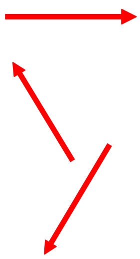
この教科書のベクトルの導入の文章は簡潔で、読んでいて気持ちがいい。しかし、初めてベクトルを習う高校生にとっては、この文章では納得しないのではないだろうか。小学校から中学校に上がって、算数から数学になったときの最初の戸惑いは、未知数 x なのかな、と思うことがある。慣れてしまった人にとっては、 x と置いて方程式を作ってそれを解く、というのが当たり前のように思えるが、その境地に達するのに、最初は変に考え過ぎず、言われるがままに問題を解いていくだけであっただろう。そしてしばらくしたら、こっちの方が簡単に解けるんだ、と納得し、文字 x に親しみが沸いてくるのではないか、と思う。私は、長年、様々な高校生を教えてきて、この壁を乗り越えられずに数学嫌いになった人たちを数多く見てきた。が、むしろ、 x って何？、と最初に考え過ぎて壁を作った人の方が、数学的素養が十分に備わっているような気がする。でも、その壁を乗り越えるかどうかは、最終的には本人の問題なのだろう。乗り越えた後の展望には広大な平原が横たわっていて、Excellentな人に変貌するのは、乗り越えた人の戯言なのかもしれない。このベクトルも、未知数 x のときと同じように、最初に壁を作らせず、様々な問題を解かせて、こんなもんか、と思わせるのが、ベストとは言わないがベターな勉強法であろう。つまり、最初の授業でベクトルを教える、または学ぶときの合い言葉は、
「まず解いてみよう」、そして、「なんだ、こんなもんか」である。
それでは、第６問の解説に話しを戻そう。

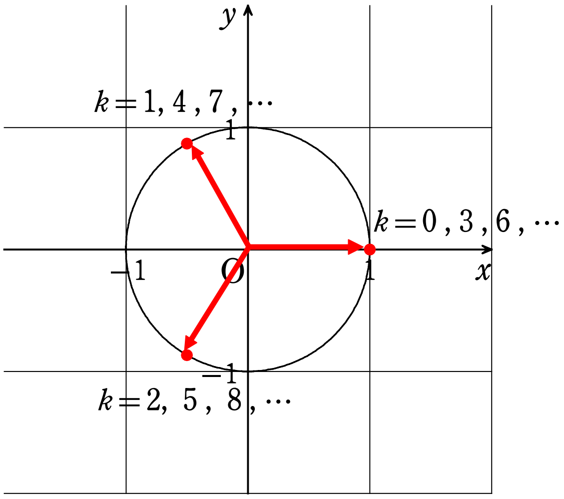
k はコイン投げで裏になった回数である。ここで $l=0,1,2,\cdots$ とする。

$k=3l$ 　　のときはベクトル

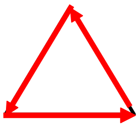
$k=3l+1$ のときはベクトル

$k=3l+2$ のときはベクトル





ベクトルの和は、始点と終点を合わせながら平行移動させ、最初の始点と最後の終点を結んだものになる。

この問題は、原点から始まって原点に終わらせるので  のような形になるということである。それでは、コイン投げの裏表で (1) の８回投げて原点に終点がある場合を考えてみよう。

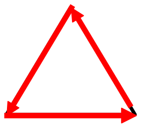
まず、

1	2	3	4	5	6	7	8
裏	裏	裏	裏	裏	裏	裏	裏

は原点から動かないのでＯＫである。
これが最初に気付いたパターンである。次に、表が３回出るパターンを考えた。

1	2	3	4	5	6	7	8
表	裏	表	裏	表	裏	裏	裏

をまず最初に考えた。これから全てのパターンを洗い出してみようかな、と思ったが、意外と大変であることが分かった。適当に当てはめても原点に戻るパターンにはならない。いろいろ試行錯誤した結果、ようやく解く方法を見つけた。

要するに  のパターンになるには、次の表１の〇の中から表になる３つを選ぶ。

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏	〇	裏	〇	裏	〇	裏	〇	裏	〇	裏	〇

表１

さらに、単に選ぶのではなく、$\{k \mid k=0,3\}$、$\{k \mid k=1,4\}$、$\{k \mid k=2,5\}$から１つずつ選ばなければ原点に戻るパターンにならない。。

すなわち

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏	表	裏	表	裏	表	裏		裏		裏	

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏	表	裏	表	裏		裏		裏		裏	表

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏	表	裏		裏	表	裏		裏	表	裏	

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏	表	裏		裏		裏		裏	表	裏	表

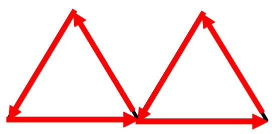
kの値	0		1		2		3		4		5
表裏		裏	表	裏	表	裏	表	裏		裏	

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏		裏	表	裏		裏	表	裏		裏	表

kの値	0		1		2		3		4		5
表裏		裏		裏	表	裏	表	裏	表	裏	

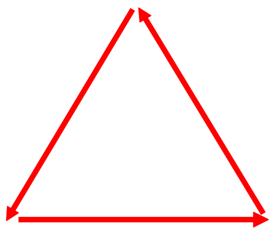
kの値	0		1		2		3		4		5
表裏		裏		裏		裏	表	裏	表	裏	表

以上の８通りとなり、計算式は $2^3=8$ である。これで終わりかな、と思ったが見直した。



２回連続になっても最終の終点は原点になるが、その為には表が６回、裏が少なくとも５回必要であり、コイン投げ８回には収まらない。でも、何故か不安がよぎる。この大学がこのままで終わ

るわけがない、という今までの経験からくる不安である。じっくり検証してみる。そこで気付く。表表連続したパターンを検証していなかった。最初はチラッと考えたのだが、８回を超えてしまうよな、と思い込んでしまった。実際の試験のとき、これで終わって、９通りとして、答えを $\dfrac{9}{2^8}=\dfrac{9}{256}$ と書いてしまっていたら、翌日の自己採点で涙を流していただろう。要するに、次の一回り大きな三角形になる場合で８回で終わるのがあった。



このパターンになるのが次の１通りである。

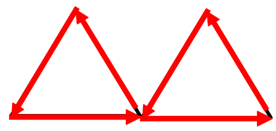
kの値	0			1			2	
表裏	表	表	裏	表	表	裏	表	表

よって、求める確率は　$\dfrac{10}{2^8}=\dfrac{5}{128}$　……（答）

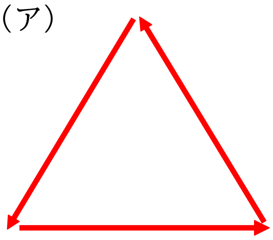
次に (2) の解法を考える。
200 回のコイン投げをいきなり考えるより、まず 20 回でイメージをつかんでみようとした。さらに表が出る回数を 6 回とすると裏が出る回数は 14 回である。この裏の回数を(1)と同じように考え、裏が出る回数によって

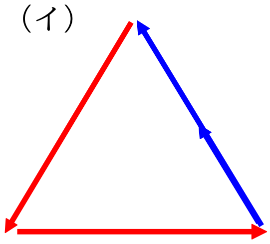
$$K_0=\{k \mid k=0,3,6,9,12\}$$
$$K_1=\{k \mid k=1,4,7,10,13\}$$
$$K_2=\{k \mid k=2,5,8,11,14\}$$

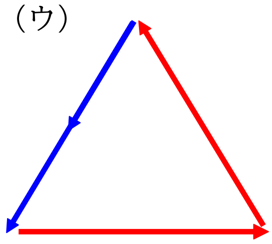
の３つの集合を考える。

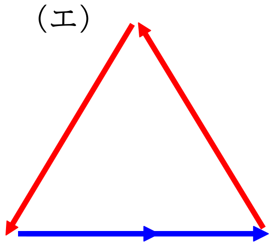


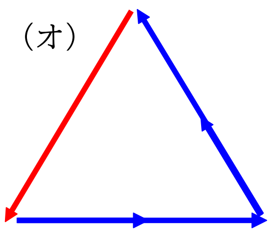
まず最初は、三角形が２つになる選び方である。これは集合 K_0、 K_1、 K_2 からそれぞれ２つずつ選び、それらの積が 右図になるパターンである。すなわち、 ${}_5C_2\cdot{}_5C_2\cdot{}_5C_2=({}_5C_2)^3$ である。
次に、連続して表が出た場合の三角形を考える。そのとき、単に大きな三角形だけではなく、以下に示す７種類の三角形があると気付いた。

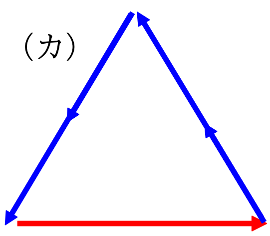
（ア）


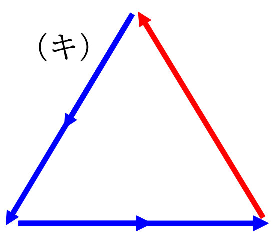
（イ）


（ウ）


（エ）


（オ）


（カ）


（キ）


それぞれの場合の数は、

（ア） ${}_5C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 = ({}_5C_1)^3$　　（イ）～（エ） ${}_5C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_5C_1 = ({}_5C_1)^2 \cdot {}_5C_2$

（オ）～（キ） ${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_5C_1 = {}_5C_1 \cdot ({}_5C_2)^2$

以上から、 20 回のコイン投げで、表が 6 回で最終的に終点が原点に戻る場合の数は、$({}_5C_2)^3 + 3({}_5C_2)^2 \cdot {}_5C_1 + 3{}_5C_2 \cdot ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_1)^3$ となる 。この形を見ると因数分解をしたくなるのは私だけじゃないだろう。 $({}_5C_2)^3 + 3({}_5C_2)^2 \cdot {}_5C_1 + 3{}_5C_2 \cdot ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_1)^3 = ({}_5C_2 + {}_5C_1)^3$

この形で、２００回のコイン投げで、表が ちょうど r 回出て、最終的に原点の戻る場合の数に拡張できるだろうか。 ${}_5C_2 + {}_5C_1$ 、これを拡張すると、

${}_{66-m}C_m + {}_{65-m}C_{m-1} + {}_{66-m}C_{m-2} + \cdots + {}_{66-m}C_2 + {}_{66-m}C_1$ となりそうであるが、この後どうするのか、皆目見当も付かない。う～ん、と唸りながら悩む。まさに土砂降りの雨の中を歩いているような気がしてくる。が、雨雲がパッと晴れて光が差し込むように、ふっと次の公式を思い出した。 $\boxed{{}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \quad \text{ただし}\quad 1 \leqq r \leqq n-1,\ n \geqq 2}$

　これはある特定の 1 個を含む場合（ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ）と含まない場合（ ${}_{n-1}C_r$ ）は互いに排反なので、それを単純に足した数はもとの組み合わせの数に等しい、というものである。

これを使えば $({}_5C_2)^3 + 3({}_5C_2)^2 \cdot {}_5C_1 + 3{}_5C_2 \cdot ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_1)^3 = ({}_5C_2 + {}_5C_1)^3 = ({}_6C_2)^3$ となる。

20 回のコイン投げで、表が 6 回のときは $({}_6C_2)^3$ となる理由を考えなければ、これを 200 回のコイン投げで、表が ちょうど r 回出る場合まで拡張できない。

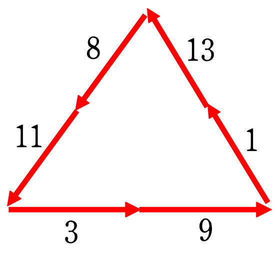
　${}_5C_r$ の 基本的な考えは、$\{0, 3, 6, 9, 12\}$ と $\{1, 4, 7, 10, 13\}$ と $\{2, 5, 8, 11, 14\}$ から r 回選ぶということである。それを 6 回にして、それぞれから 単に2 つ選ぶだけで、先に示した８つのパターンができる、ということである。ここで悩みに悩んだ末、ある考えが閃いた。各集合の中に表表と連続させる要素①を加えたらどうだろうか。つまり、

　{ 0 , 3 , 6 , 9 , 12 , ① }、{ 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , ① }、{ 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , ① } を考える。

例えば、①以外を選んだ場合

①	①	①
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14

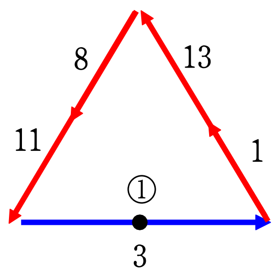
のときは、



集合 R_0 で①を選んだ場合

①	①	①
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14

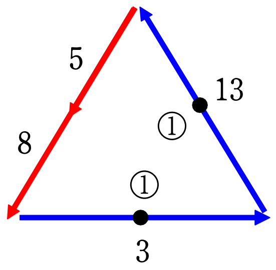
のときは、



R_0と R_1 で①を選んだ場合

①	①	①
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14

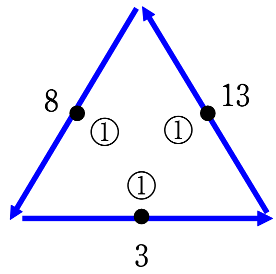
のときは、



$R_0\ R_1 R_2$ で①を選んだ場合

①	①	①
0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14

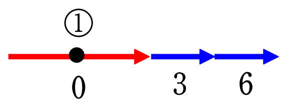
のときは、



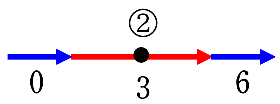
要するに $({}_6C_2)^3$ が 20 回のコイン投げで、ちょうど表が 6 回で最終的に原点に戻る場合の数になる。しかし、これを 200 回まで拡張するにはまだまだ不十分であろう。それでは、次に20 回のコイン投げで、ちょうど表が 12 回で最終的に原点に戻る場合を考えてみる。

これも、上と同じように考えて、裏の出現回数の各要素に①と②と③を加えた集合を考える。つまり、{ 0 , 3 , 6 , ① , ② , ③ }、{ 1 , 4 , 7 , ① , ② , ③ }、{ 2 , 5 , 8 , ① , ② , ③ } とする。ここでは、この中の集合 R_0={ 0 , 3 , 6 , ① , ② , ③ } だけを取り出して、①~③の役割を明確にする。表 12 回なので、 R_0 からは $\dfrac{12}{3}=4$ 回を選択することになるので、

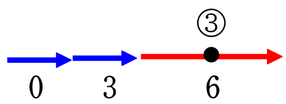
例えば、 0 3 6 ① ② ③ のときは、



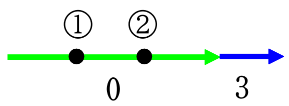
0 3 6 ① ② ③ のときは、



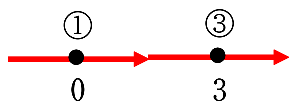
0 3 6 ① ② ③ のときは、



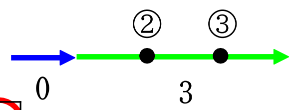
0 3 6 ① ② ③ のときは、



0 3 6 ① ② ③ のときは、

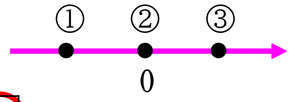


0 3 6 ① ② ③ のときは、



このパターンは 0 3 6 、 0 3 6 、 0 3 6 の場合の３通りある。

0 | 3 | 6 | ① | ② | ③ のときは、



このパターンも 0 | 3 | 6 、 0 | 3 | 6 、 0 | 3 | 6 の場合の３通りある。

以上より、集合 R_0 の選び方は、 $3+3\times3+1\times3=15$ となり、これは ${}_6C_4=15$ の値と同じになる。 すなわち、①～③を上記のような結合子と考えると全てのパターンが網羅される。

このような考え方で、 200 回のコイン投げで、表がちょうど r 回出る場合の数を求めて、(2) の解法をしてみる。

ようやく (2) の解法が、ここから始まる。

r 回で X_{200} が O にあるので、 r は３の倍数でなければならない。

なぜならば、 $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}, \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ は３種類のベクトル →↖↙が表現され、それの個数（表の数）が同数にならなければ X_{200} は O にはならない。

また、 $\left[\dfrac{200}{3}\right]=66$ なので、 $r=3m$ （ $m=0, 1, 2, \cdots, 66$ ）とおく。

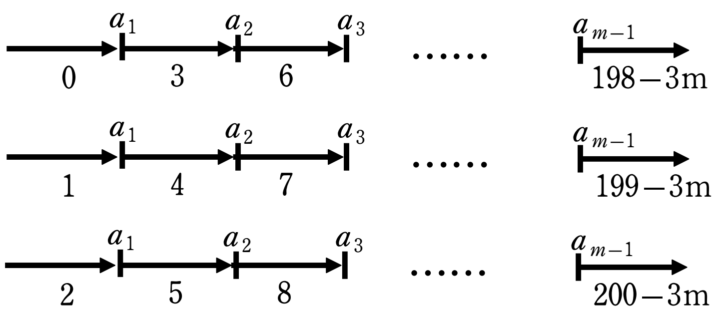
$m\geqq2$ のとき

$K_0=\{0, 3, 6, \cdots, 198-3m, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{m-1}\}$

$K_1=\{1, 4, 7, \cdots, 199-3m, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{m-1}\}$

$K_2=\{2, 5, 8, \cdots, 200-3m, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{m-1}\}$ を考える。

この集合の要素が 整数は、 $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}, \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ の k の値に対応し、要素が a_n の n の意味は、連なった r 個のベクトルの連結する場所を示す（下図参照）。



ここで、連結した場所が選ばれた場合は、表が連続して出たということであり、裏の回数はその分減少し、さらに k の値の列は、右にずれる。

また、 $n(K_0)=n(K_1)=n(K_2)=m$ なので、 ベクトル →になる場合の数は ${}_{66}C_m$ 、その各々について、ベクトル ↖になる場合の数は ${}_{66}C_m$ 、その各々について、ベクトル ↙になる場

合の数は ${}_{66}C_m$ となる。

これより、$m \geqq 2$ のとき、 X_{200} が O にあり、かつ、合計 200 回のコイン投げで表がちょうど $r=3m$ 回出る確率は $P_r=\dfrac{({}_{66}C_m)^3}{2^{200}}$………① となる。

$m=1$ のとき

$K_0=\{0,3,6,\cdots,198\}$　$K_1=\{1,4,7,\cdots,199\}$　$K_2=\{2,5,8,\cdots,200\}$

となり、表がちょうど $r=3$ 回出る確率は $P_r=\dfrac{({}_{66}C_1)^3}{2^{200}}$ となって、①に含まれる。

$m=0$ のとき

表が 1 回も出ない、すなわち全て裏のときも X_{200} が O にあるので成り立つ。

その確率は $P_r=\dfrac{1}{2^{200}}=\dfrac{({}_{66}C_0)^3}{2^{200}}$ となって、これも①に含まれる。

以上より、 $0 \leqq r \leqq 200$ さらに $r=3m$ （ $m=0,1,2,\cdots,66$ ） のとき

求める確率は $P_r=\dfrac{({}_{66}C_m)^3}{2^{200}}$ となる。 ……（答）

次に P_r の最大値を求める。ここで $A_m={}_{66}C_m$ とおく。

$$\frac{A_{m+1}}{A_m}=\frac{{}_{66}C_{m+1}}{{}_{66}C_m}=\frac{66!}{(m+1)!\cdot(65-m)!}\cdot\frac{m!\cdot(66-m)!}{66!}=\frac{66-m}{m+1}$$

$A_m \leqq A_{m+1}$ のとき

$\dfrac{66-m}{m+1} \geqq 1$ 、さらに $m+1>0$ なので　$66-m \geqq m+1$　これより　$m \leqq \dfrac{65}{2}=32.5$

ここで、m は整数なので、 $m=0,1,2,\cdots,32$ のとき $A_m \leqq A_{m+1}$

すなわち $A_0<A_1<A_2<\cdots\cdots<A_{33}>A_{34}>A_{35}>\cdots\cdots>A_{66}$

これより $A_m={}_{66}C_m$ の最大となる m の値は 33 である。

また、 $P_r=\dfrac{({}_{66}C_m)^3}{2^{200}}=\dfrac{(A_m)^3}{2^{200}}$ なので、 A_m が最大になる m の値と P_r が最大になる m の値は同じなので、 P_r が最大となる r の値は、 $r=3\times 33=99$ となる。……（答）

ようやく解き終わった、という感じである。答えの $P_r=\dfrac{({}_{66}C_m)^3}{2^{200}}$ は早くから見つけたが、それが何故なのか、という理由付けに頭を悩ました。実際の試験会場では、適当にごまかして答えを書いてしまう気がするが、果たして何点貰えるのだろうか。数学的帰納法で証明することも一瞬考えたが、 $({}_{66}C_m)^3$ という綺麗な場合の数になっているので、是非とも納得できる理由を付けたかった。上の結合子というアイデアは苦肉の策のような気がするが、果たして納得できるだろうか。かなりの時間を費やしたのは事実である。本番ではこのようなアイデアは思い浮かばないと思うが、もっとエレガントな解答があるような気もするが、第６問の数学としての解答･解説は以上にする。

次にこの問題をPythonを使って分析しようと思うが、 200 回のコインを投げを全てチ

ェックするのも大変、というかあまり意味を感じないので、Pythonを使ってベクトル表示も可能である、という趣旨で次のプログラムを作成した。

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーtokyo_22_06_NO1ーーーーーーーーーーー

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title,x_label = "x", y_label = "y"):
  ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
  ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
  ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
  ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
  ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
  ax.grid()
  ax.axhline(0, color = "black")
  ax.axvline(0, color = "black")
```

座標軸の設定はよく使うので関数として定義した。
関数名はデカルトに敬意を表してdescartesとした。
https://python.atelierkobato.com/quiver/　を参考にしました。ありがとうございます。

```
def draw_vector(ax, s_point, e_point, color = "blue"):
  ax.quiver(s_point[0], s_point[1], e_point[0], e_point[1],
            color = color, angles = 'xy',
            scale_units = 'xy', scale = 1)
```

ベクトルの描画を関数として定義した。
始点と終点、そして色を使って描画できる。

```
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
descartes(ax, [-10, 8], [-6, 10],"Tokyo University 2022 Math qu.6 NO1")

n=[]
for i in range(18):
  n=n+[0]*i+[1]
n=n+[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
n=n+[0,0,1,0,0,0,0,0,0,1]
n=n+[1]*9
```

要素が２００個のリストを作成しているが、0を表、1を裏、としている。
172回まで、表の回数を1～17個と順次増やしている。
最後の29回で終点が原点に戻るように調整している。

```
r=0
k=0
vs=[0, 0]
```

rは表の回数　kは裏の回数
vsは描画するベクトルの始点

```
for i in range(200):
  if n[i] == 0:
    r += 1
```

最初に作成したリストnに従ってベクトルを表示する。

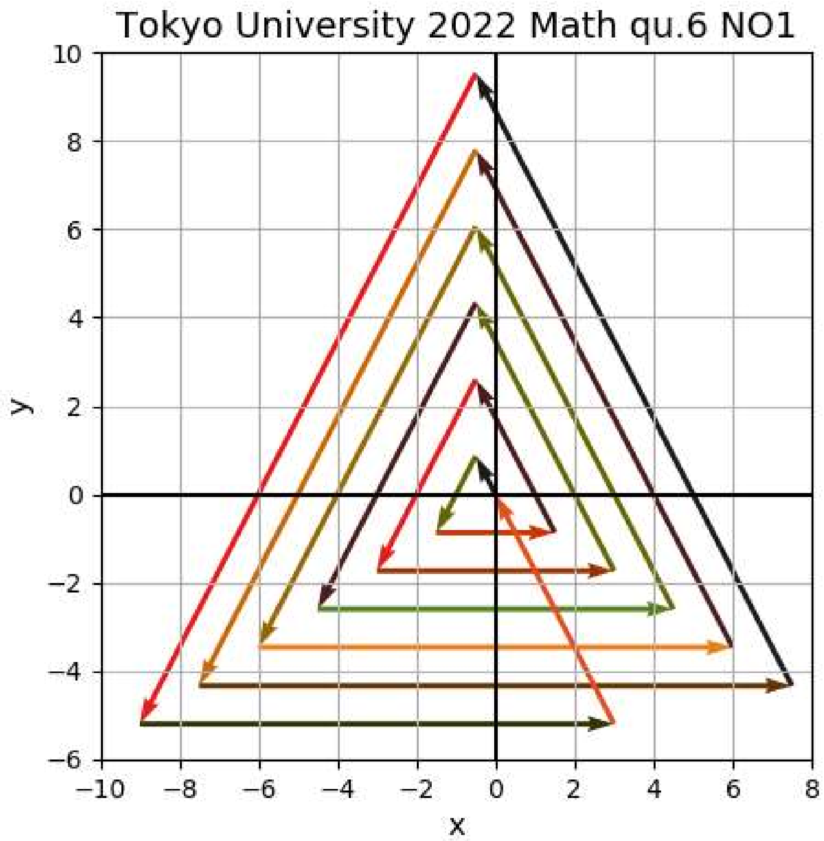
```
    if i < 199 and n[i+1] != 0:
      v = np.array([np.cos(2*k*np.pi/3),np.sin(2*k*np.pi/3)])
      draw_vector(ax, vs, r*v, (i%10/10,i%6/10,i%2/10))
      vs= vs+r*v
      r=0
  else:
    k += 1
```

要素が0のときは、次の要素が1ならば描画するが、0ならば描画しない。(i%10/10,i%6/10,i%2/10)はRGBでの色の指定で特に意味はない。

```
n1=["裏" if value==1 else value for value in n]
n2=["表" if value==0 else value for value in n1]
print("コイン投げの回数は、",len(n))
print("そのパターンは",n2)
print("裏の回数は、",sum(n))
print("表の回数は、",len(n)-sum(n))
plt.show()
```

————————————————————————python program————————————

［出力］



コイン投げの回数は、 200

そのパターンは[’裏’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’表’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’, ’裏’]
裏の回数は、 29
表の回数は、 171

以上で第６問の解説･解答を終わる。

２０２２年の東京大学　数学（理系）の入試問題を振り返ってみて、各大問の中にある小問の(1) まではそれ程難しくないだろう。戦略として、まずは全問を一通り読んでみて(1)ぐらいまでは解答をして、その後、完答出来そうな問題を集中して解いていく、ということかな、と思う。それでは各問の難易度をもう一度振り返ってみる。

第１問は、極めて基本的な問題だろう。数学Ⅲの教科書を終えた後に力試しに解いてみる問題として良問と思う。

第２問は、(1) を数学的帰納法で証明しよう、と気付いたらそれ程難しくないだろう。しかし、(2) の必要十分条件については、これかな、と予想は出来そうだが、それを証明するには、余りの形に再度漸化式を使うんだ、と気付かない限り無理と思う。(2) の証明がなくても、(3) の答えだけなら出そうだが、果たして点数は貰えるのか定かではない。

第３問は、まず問題文を読んで図が描けるかどうかであろう。描けたなら(1) はそれ程難しくなく、(2) (3) も図から求められる。

第４問は、(1) はそれ程難しいとは思わないが、様々なアプローチの仕方があるだろう。

第５問は、難問だろう。図のイメージを掴むのが難しい。

第６問は、(1) は簡単であるが、(2) の答えを導き、さらに証明が難しいだろう。

最後に、集中する、というのが問題を解く鍵である。歩く方向も全く分からない暗闇の中に、突然光が差し、辺りを明るくし、遠くにあるゴールまで見渡せる道を見つた喜びを味わえるのは、やはり普段の地道な努力、過去問を必死に解いている、という地道な努力があればこそ、だと思う。つまり、過去問を解くときも本番のつもりで集中して解くことが大事ということである。最後は月並みな言葉になってしまったが以上で解説は終わる。