

2022年度 東北大学 数学(理) EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

東北大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代なら、まるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに6題を続けて考えきる知力・体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力・体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、普通の人である著者の解説本の方が分かりやすいのではないかと自画自賛しながら書いている。

1 K を3より大きな奇数とし、 $l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える。ただし、たとえば、 $K=5$ のとき、 $(l, m, n) = (1, 1, 3)$ と $(l, m, n) = (1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

(1) $K=99$ のとき、 N を求めよ。

(2) $K=99$ のとき、 l, m, n の中に同じ奇数を2つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ。

(3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ。

(1) これを読んで、まずは実際にどうなるのか、具体的に考えてみると、次のような表が作れる。

1	1	97	3通り
1	3	95	6通り
1	5	93	6遠い
⋮	⋮	⋮	⋮
1	49	49	3通り

3	3	93	3通り
3	5	91	6通り
3	7	89	6遠い
⋮	⋮	⋮	⋮
3	47	49	6通り

.....

31	31	37	3通り
31	33	35	6通り

33	33	33	1通り
----	----	----	-----

これらを全て加えても答えが出そうである。最後が3通りになるか、6通りになるのかの違いに注意すれば、それ程面倒な計算ではないだろう。しかしエレガントではない。もっと簡単に求められないか、と考える。

l, m, n が奇数ということなので、奇数の形の定番 $2k+1$ と置いたらどうなるのだろうか。

つまり、 $l=2a+1, m=2b+1, n=2c+1$ ただし a, b, c は0以上の整数とする。

すると、 $K=l+m+n=2(a+b+c)+3$ となる。

$$K=99 \text{ なので}$$

$$2(a+b+c)+3=99$$

$$a+b+c=48$$

これは何を意味するのだろうか。 a, b, c は足して48になる 0 を含む整数である。

これらか、場合の数の中に似たような問題が教科書にあったのを思い出してほしい。以下に抜粋する。

----- 「数学Ⅱ（数研出版）」 -----

研究 重複を許して取る組合せ

組合せ ${}_nC_r$ では、異なる n 個のものから、異なる r 個を取り出した。ここでは、同じものを繰り返し取ってもよいとして、 r 個取る組合せの総数について考えてみよう。

例 1 3 個の文字 a, b, c から重複を許して 5 個取る組合せの総数例えば、 a を 2 個、 b を 2 個、 c を 1 個取った組合せを $aabbc$ と書くことにする。ここで、5 個の $\bigcirc$ と 2 個の仕切り $|$ の順列を考え、問題にしている組合せとの間に、次のような対応をつける。

$$aabbc \longleftrightarrow \bigcirc\bigcirc | \bigcirc\bigcirc | \bigcirc$$

$$abbbc \longleftrightarrow \bigcirc | \bigcirc\bigcirc\bigcirc | \bigcirc$$

$$aaacc \longleftrightarrow \bigcirc\bigcirc\bigcirc | | \bigcirc\bigcirc$$

$$bbbbb \longleftrightarrow | \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc |$$

.....

このようにすると、 a, b, c から重複を許して 5 個取る組合せと、5 個の $\bigcirc$ と 2 個の $|$ の順列が、1 つずつ対応する。よって、求める組合せの総数は、7 個の場所から $\bigcirc$ をおく 5 個を選ぶ方法の総数に等しく、次の値になる。

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = 21 \quad \text{終}$$

重複を許して取る組合せ

異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組合せの総数は、 r 個の $\bigcirc$ と $(n-1)$ 個の $|$ の順列の総数に等しく

$${}_{n+r-1}C_r$$

例 2 等式 $x+y+z=8$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の個数 3 個の文字 a, b, c から重複を許して、 a を x 個、 b を y 個、 c を z 個取って合計 8 個にする方法の総数を求める問題と同じである。よって、求める組の個数は、異なる 3 個のものから重複を許して 8 個取る組合せの総数と等しく、次のようになる。

$${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45 \quad \text{すなわち} \quad 45 \text{ 個}$$

----- 「数学Ⅱ（数研出版）」からの引用 -----

つまり、先ほどの問題は異なる 3 個 a, b, c から重複を許して 48 個取る組合せの数になるので

$$(1) \text{ の解答は、 } N = {}_{3+48-1}C_{48} = {}_{50}C_{48} = {}_{50}C_2 = \frac{50 \cdot 49}{2 \cdot 1} = 1225 \cdots \cdots (\text{答}) \text{ となる。}$$

(2) これもまず具体的なパターンを考えてみる。

1	1	97	3通り
3	3	93	3通り
5	5	89	3通り
⋮	⋮	⋮	⋮
33	33	33	1通り
35	35	29	3通り
⋮	⋮	⋮	⋮
49	49	1	3通り

これは、この表を使って計算する。最後の行にある49は $49=2\cdot 25-1$ なのでこの表は25行ある。
 よって、33が3個並んでいる行だけを注意すれば、同じ奇数を2つ以上含む組の個数は
 $3\cdot 24+1=73$ 個…… (答) である。

(3) $N>K$ を満たす、とは果たしてどういう意味なのか。

問題文をもう一度読み返すと、まず K があって、その後に組の個数 N が求められる。
 ということは、 K を使って N が求められるはず、ということになる。
 このような考えから、奇数 K を $K=2k+1$ ただし、 k は自然数、とおき、
 さらに、(1) と同様にして、 $l=2a+1, m=2b+1, n=2c+1$ とおく。
 すると、 $K=l+m+n$ より $2k+1=2(a+b+c)+3$ となり、 $k-1=a+b+c$ となる。
 つまり、 N は異なる3個 a, b, c から重複を許して $k-1$ 個取る組合せの数になるので

$$N=_{3+k-1-1}C_{k-1}=_{k+1}C_{k-1}=_{k+1}C_2=\frac{(k+1)(k+1-1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2} \text{ となる。}$$

$$N>K \text{ を満たすので } \frac{k(k+1)}{2}>2k+1, \quad k^2-3k-2>0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{これは } k^2-3k-2=0 \text{ とおくと } k=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \text{ なので}$$

$$k>0 \text{ から}\textcircled{1}\text{の不等式の解は } k>\frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

さらに、 $4<\sqrt{17}<5$ で k は自然数なので、 $k\geq 4$ すなわち $K\geq 9$

よって、 $N>K$ を満たす最小の K は9…… (答) となる。

次にPythonでこれを分析してみよう。それが以下のプログラムである。

```
-----touhoku_22_01_NO 1 -----
cnt1,N,K=0,0,99
for l in range(1,K+1,2):
    for m in range(1,K+1-l,2):
        n=K-(l+m)
        if l==m or l==n or m==n:
            cnt1 += 1
        N += 1
    print("N=",N,"cnt1=",cnt1,"l=",l,"m=",m,"n=",n)
print("(1)の答は",N,"(2)の答は",cnt1)
-----python program-----
```

[出力]

```
N= 1216 cnt1= 71 l= 91 m= 1 n= 7
N= 1217 cnt1= 71 l= 91 m= 3 n= 5
N= 1218 cnt1= 71 l= 91 m= 5 n= 3
N= 1219 cnt1= 71 l= 91 m= 7 n= 1
N= 1220 cnt1= 71 l= 93 m= 1 n= 5
N= 1221 cnt1= 72 l= 93 m= 3 n= 3
N= 1222 cnt1= 72 l= 93 m= 5 n= 1
N= 1223 cnt1= 72 l= 95 m= 1 n= 3
N= 1224 cnt1= 72 l= 95 m= 3 n= 1
N= 1225 cnt1= 73 l= 97 m= 1 n= 1
(1)の答は 1225 (2)の答は 73
```

コンピュータの強みは単純作業を黙々と成し遂げる、ということである。まず、奇数 K の値を与え、それから総当たりで足して K になる3つの奇数のパターンを見つけ、それがいくつ出来るかをカウントし、さらに、その中で同じ奇数が2つ以上になるのをカウントして表示する。それが上のプログラムである。

次に(3)の分析をする。これはグラフを描いてみる。

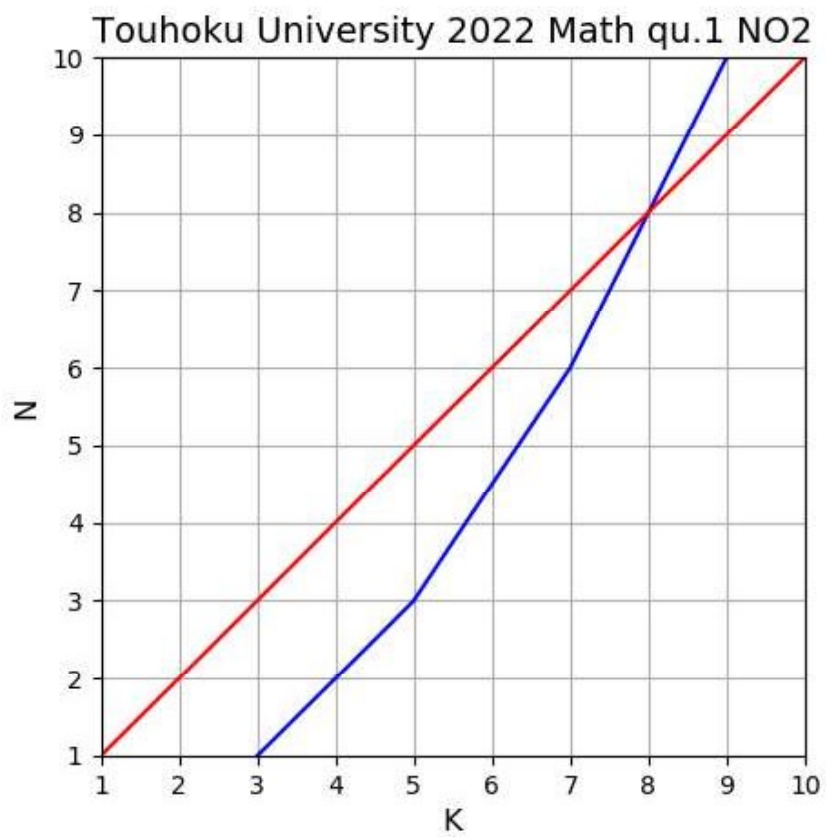
-----touhoku_22_01_NO 2-----

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title, x_label = "K", y_label = "N"):
    ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
    ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
    ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
    ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
    ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
    ax.grid()
    ax.axhline(0, color = "black")
    ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
title1 = "Touhoku University 2022 Math qu.1 NO2"
K_last, N_last = 10, 10
descartes(ax, [1, K_last], [1, N_last], title1)
N, x, y = 0, [], []
for K in range(3, K_last + 1, 2):
    for l in range(1, K + 1, 2):
        for m in range(1, K + 1 - l, 2):
            n = K - (l + m)
            N += 1
            print("K=", K, "N=", N, "l=", l, "m=", m, "n=", n)
```

```
x.append(K)
y.append(N)
N=0
ax.plot(x,y , color = "blue")
print(x)
print(y)
a = np.linspace(1,K_last,100)
b = a
ax.plot(a ,b, color = "red")
plt.show()
```

-----python program-----

[出力]



このグラフを見ると、まさに $N > K$ を満たす最小の K の値は9になることが分かる。
以上で 1 の解説を終わる。

2 a を実数とし、実数 x の関数 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ を考える。

- (1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $a < 2$ のとき、 $f(x)$ は2つの極小値をもつ。このとき、 $f(x)$ が極小となる x の値を α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) とする。 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ。
- (3) $f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとるとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ と x 軸との関係の図から解いてみる。

[解]

[1] 2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が実数解を持つとき

すなわち判別式 $D = 3^2 - 4a \geq 0$ なので、 $a \leq \frac{9}{4}$ のとき

$x^2 + 3x + a = 0$ の解 α, β ($\alpha \geq \beta$) とおく。

(i) $-1 \leq \beta < \alpha$ のとき

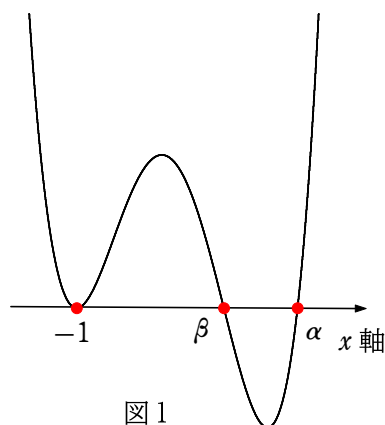


図1

図1より、 $x^2 + 3x + a = 0$ が異なる2つの実数解を持てば、必ず最小値が負になるので、判別式 $D = 9 - 4a > 0$

すなわち、 $a < \frac{9}{4}$ ①

さらに、 $-1 \leq \beta < \alpha$ になる a の範囲は

$$y = x^2 + 3x + a = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + a \text{ を考えると、}$$

放物線の軸 $x = -\frac{3}{2}$ は $-\frac{3}{2} < -1$

つまり、異なる2つの実数解は必ず $\beta < -\frac{3}{2} < \alpha$ となって

$-1 \leq \beta < \alpha$ とはならないので、図1になる a の値はない。

(ii) $\beta < -1 \leq \alpha$ のとき

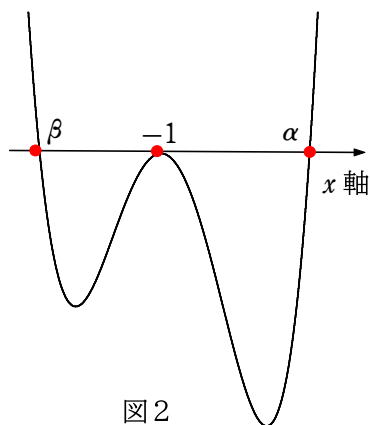


図2

図2より、このとき、必ず最小値は負になる。

(i) と同様に $y = x^2 + 3x + a$ を考えると、

$\beta < -1 \leq \alpha$ になる条件は、

$$x = -1 \text{ のとき } y = 1 - 3 + a < 0$$

これを解くと $a < 2$ となる。

(iii) $\beta < \alpha < -1$ のとき

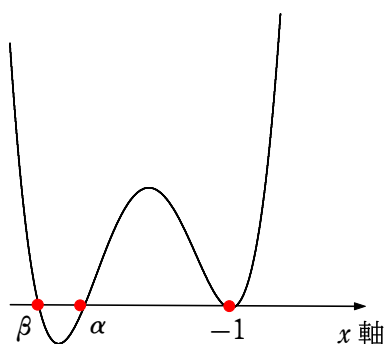


図3

図3より、(i)と同様にして、 $x^2 + 3x + a = 0$ が異なる2つの実数解を持てば、必ず最小値が負になるので、

判別式 $D = 9 - 4a > 0$ 、すなわち、 $a < \frac{9}{4}$ ……①

さらに、 $\beta < \alpha < -1$ になる a の範囲は

$$y = x^2 + 3x + a = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + a \text{ を考えると、}$$

放物線の軸 $x = -\frac{3}{2}$ は $-\frac{3}{2} < -1$ なので

$$x = -1 \text{ のとき } y = 1 - 3 + a \geq 0$$

これより $a \geq 2$ ……②

$$\text{①と②より } 2 \leq a < \frac{9}{4}$$

(i) (ii) (iii) より $a < \frac{9}{4}$

[2] 2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が実数解を持たないとき

すなわち判別式 $D = 3^2 - 4a < 0$ なので、 $a > \frac{9}{4}$ のとき

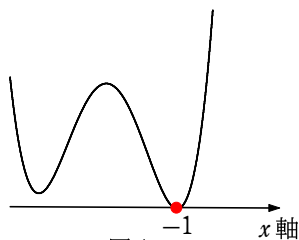


図4

図4のような概形図となり、最小値は必ず0となって、負にはならない。

[1] と [2] より、 $f(x)$ の最小値が負となるには $a < \frac{9}{4}$ ……(答) となる。

(2) (1) から $a < 2$ のとき 極小となる x の値が α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) なので、図4のようになる。

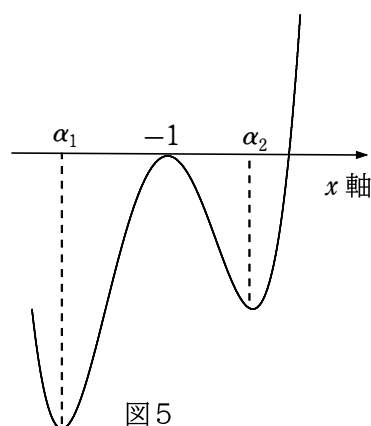


図5

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)(x+1)^2 + 2(x^2+3x+a)(x+1) \\ &= (x+1)(4x^2+11x+2a+3) \end{aligned}$$

α_1, α_2 は $f'(x) = 0$ の解の値なので、 $4x^2 + 11x + 2a + 3 = 0$ の解である。

$$\text{解と係数の関係から } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{11}{4} \\ \alpha_1 \alpha_2 = \frac{2a+3}{4} \end{cases} \text{……① となる。}$$

ここで、 $f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = (\alpha_2^2 + 3\alpha_2 + a)(\alpha_2 + 1)^2 - (\alpha_1^2 + 3\alpha_1 + a)(\alpha_1 + 1)^2$ を和と積に式変形をすると

$$f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) \left\{ \frac{9}{4}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 - \frac{3}{4}a - \frac{65}{4} \right\} \text{ となって}$$

①を代入すると

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha_2 - \alpha_1) \left(\frac{73}{64} - \frac{1}{2}a \right) \\
 &= (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{73 - 32a}{64} > 0 \quad [\because a < 2 \text{ なので } 73 - 32a > 0]
 \end{aligned}$$

よって、 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ となる。

※ この問題の解法はもっと面白いのがあるかもしれない、と思いながら計算した。計算過程を全て省略したが、和と積への式変形にはかなりの計算力が必要である。この手の大学の個別試験では、思考力を試す問題が多く、単純な計算力を試すような問題は出題されないのが普通である。なので、もっと面白い解法があるのかもしれない。

(3)

[1] 2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が実数解を持つとき

すなわち判別式 $D = 3^2 - 4a \geq 0$ なので、 $a \leq \frac{9}{4}$ のとき

(1) より $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ の概形図は、 $x^2 + 3x + a = 0$ の解 α_1 、 β_1 ($\alpha_1 \geq \beta_1$) とおくと以下の2通りである。

(i) $a < 2$ のとき

$\beta_1 < -1 \leq \alpha_1$ となって図6となる。

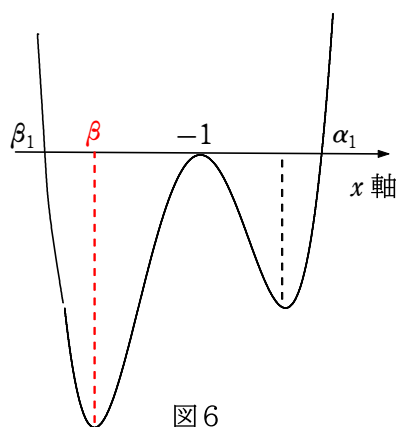


図6

(ii) $2 \leq a < \frac{9}{4}$ のとき

$\beta_1 < \alpha_1 < -1$ となって図7となる。

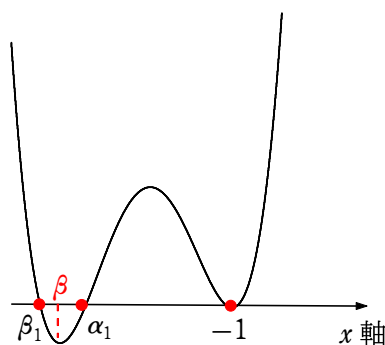


図7

極小値となる x の値を α_1 、 α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) とおくと、(2) から $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ となる。

ここで、 $\alpha_1 = \beta$ とおくと、図から $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとる。

よって、(i)、(ii) より $a < \frac{9}{4}$

[2] 2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が実数解を持たないとき、

すなわち判別式 $D = 3^2 - 4a < 0$ なので、 $a > \frac{9}{4}$ のとき

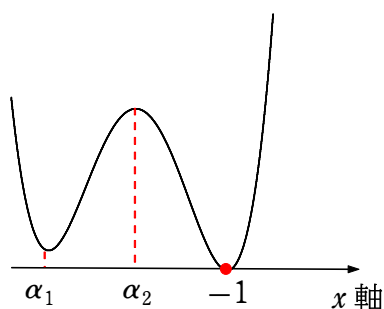


図 8

(i) $x = \alpha_1, \alpha_2$ ($\alpha_1 < \alpha_2$) で極値を持つとき

ここで図 8 のように $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ となれば $\alpha_1 = \beta$ とおくと $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとる。これより $f(\alpha_2) - f(\alpha_1) > 0$ となる a の値の範囲を求めればよい。

$$(2) \text{ から } f(\alpha_2) - f(\alpha_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{73 - 32a}{64} > 0$$

ここで $\alpha_1 < \alpha_2$ なので $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$

$$\text{よって、} \frac{73 - 32a}{64} > 0, \text{ すなわち } a < \frac{73}{32}$$

これと $a > \frac{9}{4}$ を同時に満たす a の値はない。

(ii) $x = -1$ のときのみ極値を持つとき

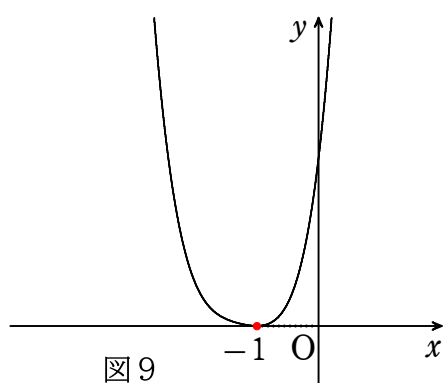


図 9

$$(2) \text{ より } f'(x) = (x+1)(4x^2 + 11x + 2a + 3)$$

ここで $4x^2 + 11x + 2a + 3 = 0$ が実数解を持たなければよいので

$$\text{判別式 } D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot (2a + 3) = 73 - 32a < 0$$

$$\text{すなわち } a > \frac{73}{32} \quad \text{このとき図 9 の概形図になる。}$$

さらに、重解、すなわち $a = \frac{73}{32}$ のとき

$$x = -\frac{16}{8} < -1 \text{ で、さらに } f\left(-\frac{16}{8}\right) > 0 \text{ なので}$$

このときも図 9 のような概形図になる。

$$\text{よって、} a \geq \frac{73}{32}$$

以上から $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとる a の値の範囲は、

$$a < \frac{9}{4} \text{ または } a \geq \frac{73}{32} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \text{ である。}$$

※ (3) の解法は、 $f'(x)$ から増減表を作成しよう、という考えにすれば、もっと簡潔になると思うが、せっかく作った (1) と (2) の概形図から求めてみたくなかった。これは受験生には勧められない。要するに自分の解法に固守してしまって、途中でもっと簡単なやり方に気付いたとしても、なかなか方針変更が出来なくてドツボにはまってしまう、という最悪のパターンである。しかし、受験でなければ、このように自分の考えを推し進めていく、というのが新しい発見を生み出す、のではないかと思う。

次にPythonでこれを分析してみよう。やはりここでは、 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x+1)^2$ のグラフを描く、というオーソドックスなプログラムにした。ただし、 a の値を 0.5 から 5 までの値に変化させた複数のグラフを同一平面上に描画した。

-----touhoku_22_02_NO 1 -----

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title, x_label = "x", y_label = "y"):
```

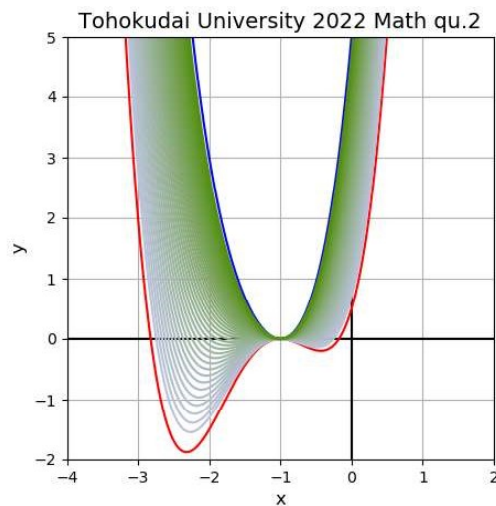
```

ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
ax.grid()
ax.axhline(0, color = "black")
ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
title1 = "Tohokudai University 2022 Math qu.2"
x_label = "x"
y_label = "y"
descartes(ax, [-4,2], [-2, 5],title1,x_label,y_label)
x=np.linspace(-3.2,3.1,1000)
a=0.5
y=(x**2+3*x+a)*(x+1)*(x+1)
ax.plot(x, y, color = "red")
a=5
y=(x**2+3*x+a)*(x+1)*(x+1)
ax.plot(x, y, color = "blue")
for a in np.arange(0.7,4.8,0.1):
    color1=(0.8-a/10,0.8-a/20,1-a/5)
    y=(x**2+3*x+a)*(x+1)*(x+1)
    ax.plot(x, y, color = color1)
plt.show()

```

-----python program-----

[出力]



通常の4次関数のグラフであるが、確かに $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ である。以上で 2 の解説を終わる。

3 正の整数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(1) $\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$ の形を見て, $\sqrt{1+x} - 1$ を変形しよう、と思った人は楽勝に解けるのではないかと思います。この変形は、基本は無理数の計算で習う「分母の有理化」だが、数学Ⅲの極限値を求める問題でもよく使われる。それを次に示す。

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{(1+x) - 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$$

これから、問題文は、 $\frac{x}{2+x} \leq \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} \leq \frac{x}{2}$ を証明すればよく、

$$\text{これは、} \frac{1}{2+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \leq \frac{1}{2} \text{ となって、}$$

さらに、 $2+x \geq \sqrt{1+x} + 1 \geq 2$ を証明することがスタートとなるだろう。

以上を頭に置いて証明する。

[証明] $x > 0$ なので、 $\sqrt{1+x} > 1$ さらに $\sqrt{1+x} + 1 > 2 \cdots \cdots ①$ は明らか。

次に、 $P = 2+x - (\sqrt{1+x} + 1) = 1+x - \sqrt{1+x}$ とおく。

$1+x > 1$ なので $(1+x)^2 > 1+x$ となって、 $1+x > \sqrt{1+x}$ となる。

これより $P = 2+x - (\sqrt{1+x} + 1) = 1+x - \sqrt{1+x} > 0 \cdots \cdots ②$

①と②から $2+x > \sqrt{1+x} + 1 > 2$ 辺々は正なので、この逆数をとると

$$\frac{1}{2+x} < \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} < \frac{1}{2} \text{ となり、}$$

$x > 0$ なので、辺々に x を掛けると、 $\frac{x}{2+x} < \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} < \frac{x}{2}$ となる。

ここで、 $\frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x(\sqrt{1+x} - 1)}{1+x-1} = \sqrt{1+x} - 1$ なので

よって、 $\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}$ となる。

これは、 $\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$ としてもよいが、

等号成立は $x=0$ に限るので、 $x > 0$ で等号は成立しない。[証明終り]

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

入試問題の各小問は、次の小問への足がかりとして使われることが多い。この(2)も(1)の結論を使うと予想されるから、 $\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$ と $\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1$ の形を比較すると、 x にあたる部分が $\frac{k}{n^2}$ となる。これを基にして以下の解法を考えた。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \frac{k}{n^2} > 0 \text{ なので、(1) から } \frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{k}{n^2}} &\leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{\frac{k}{n^2}}{2} \\ \frac{k}{2n^2 + k} &\leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{k}{2n^2} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k} &\leq S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \end{aligned}$$

ここで、まず $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2}$ を求める。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4} \dots\dots ①$$

次に $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k}$ を求めるが、直接には求まらないので、不等式をさらに

$$k \leq n \text{ なので } \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k} \leq S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \dots\dots ② \text{ となって}$$

これより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n}$ の値を求める。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2 + n} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2 + n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{4} \dots\dots ③ \end{aligned}$$

①、②、③より はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4} \dots\dots$ (答) となる。

$$\text{※ } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k} \text{ を積分での公式 } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx} \text{ など}$$

を使って直接求められないか、いろいろ考えたが、どうしても無理だった。しかたなく②のような不等式を作ったが、もし $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n}$ の値が $\frac{1}{4}$ ではなく、例えば $\frac{1}{5}$ とかになった場合、はさみ

うちの原理は使えない。そのときは、値が $\frac{1}{4}$ になる不等式を見つけなければならなくなり、とても大変な作業と予想される。つまり、もっとエレガントな解法があると思うが、どうだろうか。

次にPythonでの分析だが、当然 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ は直接求めるプログラムは作れなかった。さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k}$ も直接求められなかったので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n}$ の値が $\frac{1}{4}$ になるのを確認するプログラムにした。

```
-----touhoku_22_03_NO 1 -----
from sympy import integrate, Symbol, pi, sqrt, summation, oo, limit
k = Symbol('k')
n = Symbol('n')
s1=summation(k/(2*n**2), (k, 1, n))
s2=summation(k/(2*n**2+n),(k,1,n))
print(s1)
print(s2)
lim_s1=limit(s1,n,oo)
lim_s2=limit(s2,n,oo)
print(lim_s1)
print(lim_s2)
-----python program-----

[出力]
(n**2/2 + n/2)/(2*n**2)
(n**2/2 + n/2)/(2*n**2 + n)
1/4
1/4
```

※ちなみに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k}$ を求めようとしたら、 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k}$ まではエラーにはならず、

” Sum(k/(k + 2*n**2), (k, 1, n)) ” (出力) となって、和にする前の式が出力され、この *limit* を計算したときに

” Don't know how to calculate the mrv of 'Sum(k/(2*_p**2 + k), (k, 1, _p))”

と出力され、どのようにこの和を計算して良いのか分かりません、と表示される。

要するに、SymPy による Σ の計算には限界があるということだろう。数値計算だけならなんとか計算ができると思うが、 n の式で答を出すのはやはり難しいのでは、と思う。

以上で [3] の解説を終わる。

4 xy 平面の第 1 象限内において、直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また、直線 l と x 軸、および、円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし、 $b > a$ とする。

(1) m を用いて t を表せ。

(2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。

(3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。

(1) まず問題を読みながら図を描いてみる。それが右図である。

[解] $y = tx$ と x 軸の正の部分とのなす角 θ とおくと、

$y = mx$ とのなす角 2θ となる。

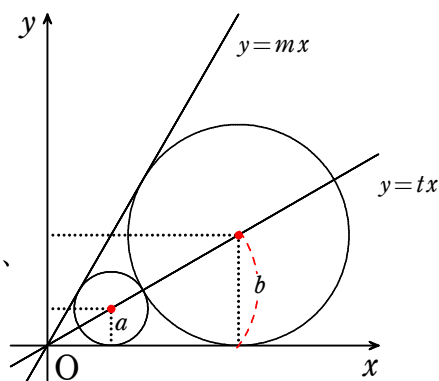
すなわち、 $\tan \theta = t$ 、 $\tan 2\theta = m$ となる。

$\tan \theta$ の 2 倍角の公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ から

$m = \frac{2t}{1 - t^2}$ となり、これを t の方程式として変形すると、

$mt^2 + 2t - m = 0$ となり、 $m \neq 0$ 、 $t > 0$ なので

$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$ (答) となる



(2)

[解] 右図の直角三角形 ABC において、

$$AB = a + b, \quad AC = b - a, \quad BC = \frac{b}{t} - \frac{a}{t}$$

三平方の定理より

$$(a + b)^2 = (b - a)^2 + \left(\frac{b}{t} - \frac{a}{t} \right)^2$$

$$(a + b)^2 = (b - a)^2 + \frac{1}{t^2} (b - a)^2$$

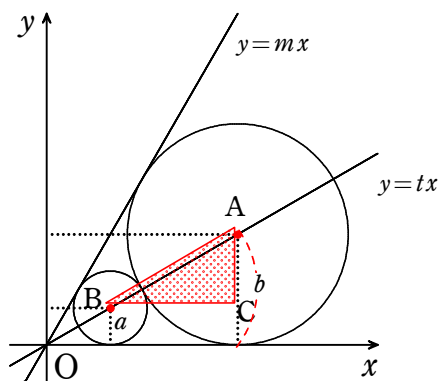
$$(a + b)^2 = (b - a)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right), \quad \text{この両辺を } a^2 \text{ で割ると}$$

$$\left(1 + \frac{b}{a} \right)^2 = \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right), \quad \text{ここで } \frac{b}{a} = x \text{ と置くと、} (1 + x)^2 = (x - 1)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \text{ となり}$$

これを x について整理すると、 $x^2 - 2(1 + 2t^2)x + 1 = 0$ となる。

$$x = \frac{b}{a} > 0 \text{ なので、} x = (1 + 2t^2) + \sqrt{(1 + 2t^2)^2 - 1}$$

$$\text{よって、} \frac{b}{a} = (1 + 2t^2) + 2t\sqrt{t^2 + 1} \text{ (答)}$$



(3) $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ の値を求めるが、(2) からの流れとしては、 m の式ではなく、
 全て t の式で表して、その極限を取ろうと考えるのが順当であろう。

[解] (1) から $t = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$ なので、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +0} t &= \lim_{m \rightarrow +0} \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \\ &= \lim_{m \rightarrow +0} \frac{(1 + m^2) - 1}{m(\sqrt{1 + m^2} + 1)} \\ &= \lim_{m \rightarrow +0} \frac{m}{\sqrt{1 + m^2} + 1} = 0 \end{aligned}$$

すなわち $m \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow +0$ となる。

$$\begin{aligned} \text{これより、} \lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1 - t^2}{2t} (1 + 2t^2 + 2t\sqrt{t^2 + 1} - 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} (1 - t^2)(t + \sqrt{t^2 + 1}) \\ &= 1 \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

次にPythonでこれを分析してみよう。ここでは、極限值がPythonを使って求められる、というのを示すのが一番いいのでは、と思い、下記のプログラムを作成した。

-----touhoku_22_04_NO 1-----

```
import sympy as sp
t = sp.Symbol('t')
m = 2*t/(1-t**2)
x = (1+2*t**2)+2*t*sp.sqrt(t**2+1)
ff = 1/m*(x-1)
ans1 = sp.limit(ff, t, 0, '+')
print(f'極限值は {ans1} です')
```

-----python program-----

[出力]

極限值は 1 です

これだけでは面白くないので、このグラフを描画するプログラムを作成した。

-----touhoku_22_04_NO2-----

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title, x_label = "x", y_label = "y"):
    ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
    ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
```

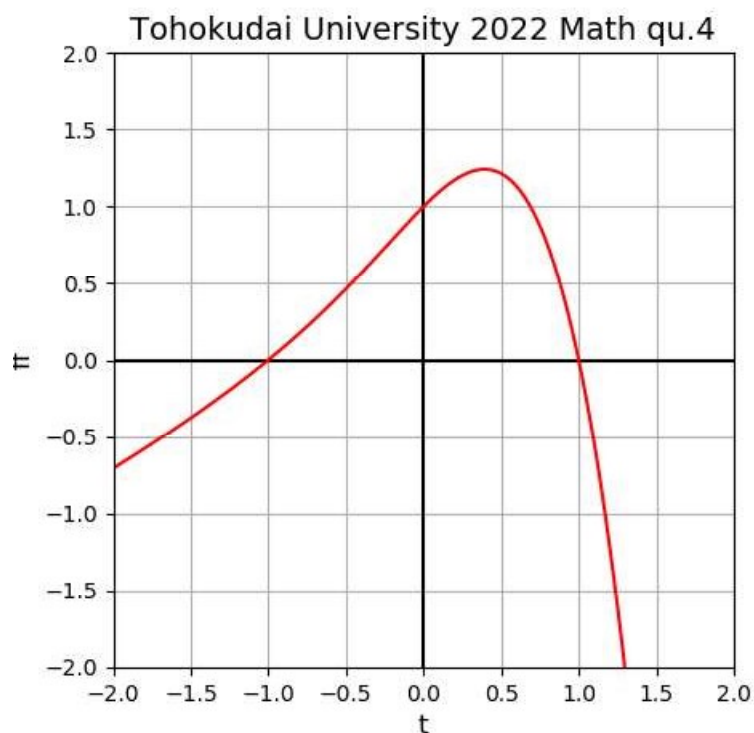
```

ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
ax.grid()
ax.axhline(0, color = "black")
ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
titlel = "Tohokudai University 2022 Math qu.4"
x_label = "x"
y_label = "y"
descartes(ax, [-2,2], [-2, 2], titlel, x_label, y_label)
t = sp.Symbol('t')
t=np.linspace(-2,2,1000)
m = 2*t/(1-t**2)
x = (1+2*t**2)+2*t*np.sqrt(t**2+1)
ff = 1/m*(x-1)
ax.plot(t, ff, color = "red")
plt.show()

```

-----python program-----

[出力]



確かに $t \rightarrow 0$ のとき 1 に収束しているのが分かる。以上で [4] の解説を終わる。

5 座標空間内において、ベクトル

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (1, 1, -1), \vec{c} = (0, 0, 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell: s\vec{a}, \ell': t\vec{b} + \vec{c} \quad (s, t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし、点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に、点 $B_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に、点 $A_k(s_k\vec{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_kB_k 、点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して、点 $A_n(s_n\vec{a})$, $B_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。

(2) 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を求めよ。

(3) (2) で求めた S, T に対して、点 A, B をそれぞれ $A(S\vec{a})$, $B(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと、直線 AB は 2 直線 ℓ, ℓ' の両方と直交することを示せ。

(1) 空間図形を図に描くには、かなり大変な作業になる。ここではイメージだけを掴むようにする。つまり、直線 $l: s\vec{a}$ は原点を通る直線で、直線 $l': t\vec{b} + \vec{c}$ は点 $(0, 0, 1)$ を通り、原点を通らない直線、ということであり、直線 l は $\vec{a} = (1, 2, 1)$ に平行で、直線 l' は $\vec{b} = (1, 1, -1)$ に平行である。これを頭に置いて問題文を読んでみる。

つまり、 $\overrightarrow{A_kB_k}$ と直線 l' は垂直であり、 $\overrightarrow{B_kA_{k+1}}$ と直線 l が垂直ということである。

このことから解法を導き出そう。

[解] 点 $A_k(s_k\vec{a})$ 、 $\vec{a} = (1, 2, 1)$ から $\overrightarrow{OA_k} = s_k(1, 2, 1) = (s_k, 2s_k, s_k)$ となり、

点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ 、 $\vec{b} = (1, 1, -1)$ 、 $\vec{c} = (0, 0, 1)$ から $\overrightarrow{OB_k} = (t_k, t_k, -t_k + 1)$ となる。

ここで、 $\overrightarrow{A_kB_k}$ と直線 l' は垂直なので、 $\overrightarrow{A_kB_k}$ と直線 l' の方向ベクトル $\vec{b}$ とが垂直になる。

$$\overrightarrow{A_kB_k} = (t_k, t_k, -t_k + 1) - (s_k, 2s_k, s_k) = (t_k - s_k, t_k - 2s_k, -t_k - s_k + 1) \text{ なので}$$

$$\overrightarrow{A_kB_k} \cdot \vec{b} = 0 \text{ となって、 } (t_k - s_k) + (t_k - 2s_k) - (-t_k - s_k + 1) = 0$$

$$-2s_k + 3t_k = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

次に、 $\overrightarrow{B_kA_{k+1}}$ と直線 l が垂直なので、 $\overrightarrow{B_kA_{k+1}}$ と直線 l の方向ベクトル $\vec{a}$ とが垂直になる。

$$\overrightarrow{B_kA_{k+1}} = (s_{k+1}, 2s_{k+1}, s_{k+1}) - (t_k, t_k, -t_k + 1) = (s_{k+1} - t_k, 2s_{k+1} - t_k, s_{k+1} + t_k - 1) \text{ なので}$$

$$\overrightarrow{B_kA_{k+1}} \cdot \vec{a} = 0 \text{ となって、 } (s_{k+1} - t_k) + 2(2s_{k+1} - t_k) + (s_{k+1} + t_k - 1) = 0$$

$$6s_{k+1} - 2t_k = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \times 3 \quad 18s_{k+1} - 4s_k = 5, \text{ よって } s_{n+1} = \frac{2}{9}s_n + \frac{5}{18} \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) (1)の答から、 s_{n+1} と s_n を共に α とおく。

$$\alpha = \frac{2}{9}\alpha + \frac{5}{18} \text{ となり、これを解くと } \alpha = \frac{5}{14} \text{ となる。}$$

これから(1)の答は、 $s_{n+1} - \frac{5}{14} = \frac{2}{9}\left(s_n - \frac{5}{14}\right)$ と式変形される。

これは数列 $\left\{s_n - \frac{5}{14}\right\}$ は初項 $s_1 - \frac{5}{14}$ 、公比 $\frac{2}{9}$ の等比数列を表す。

ここで点 A_1 は原点で、 $\vec{s_1 a_1} = (0, 0, 0)$ なので、 $s_1 = 0$ となる。

$$\text{すなわち初項 } s_1 - \frac{5}{14} = -\frac{5}{14} \text{ となるので、 } s_n - \frac{5}{14} = -\frac{5}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$$

$$\text{これより、 } s_n = \frac{5}{14}\left\{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right\} \text{ となり、}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{14}\left\{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right\} = \frac{5}{14} \dots\dots \text{ (答) となる。}$$

$$\text{次に、この答を(1)の①の式に代入すると、 } -2 \cdot \frac{5}{14}\left\{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right\} + 3t_n = 1$$

$$\text{これより、 } t_n = \frac{5}{21}\left\{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right\} + \frac{1}{3} = \frac{4}{7} - \frac{5}{21}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \text{ となり、}$$

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{4}{7} - \frac{5}{21}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\right\} = \frac{4}{7} \dots\dots \text{ (答) となる。}$$

(3) 点 $A(\vec{S}\vec{a})$ 、 $B(T\vec{b} + \vec{c})$ なので、

$$\vec{AB} = \frac{4}{7}\vec{b} + \vec{c} - \frac{5}{14}\vec{a} = \frac{4}{7}(1, 1, -1) + (0, 0, 1) - \frac{5}{14}(1, 2, 1) = \frac{1}{14}(3, -2, 1)$$

$$\text{直線 } l \text{ の方向ベクトル } \vec{a} \text{ より、 } \vec{AB} \cdot \vec{a} = \frac{1}{14}(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 0 \text{ なので、 } \vec{AB} \perp \vec{a}$$

これより、直線 AB と直線 l は直交する。

$$\text{次に、直線 } l' \text{ の方向ベクトル } \vec{b} \text{ より、 } \vec{AB} \cdot \vec{b} = \frac{1}{14}(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 0 \text{ なので、 } \vec{AB} \perp \vec{b}$$

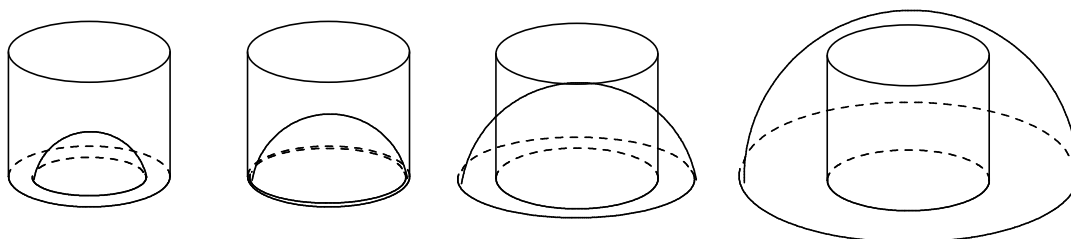
これより、直線 AB と直線 l' は直交する。

※この問題はベクトルとしては標準的な問題だろう。さらに数列の漸化式との融合問題である。

意図としては、空間の問題は図を丁寧に描くのではなく、ベクトル方程式の直線に関する内容を駆使して解けるかどうか、さらにベクトルの基本を知っているかどうか、というのを見ていると思う。

これをPythonでどのように分析しようかといういろいろ考えたが、この問題の図形を描いても2直線が浮かび上がるだけだと思い、ここではPythonの分析は省略する。以上で[5]の解説を終わる。

- 6 半径1の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と、半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき、直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

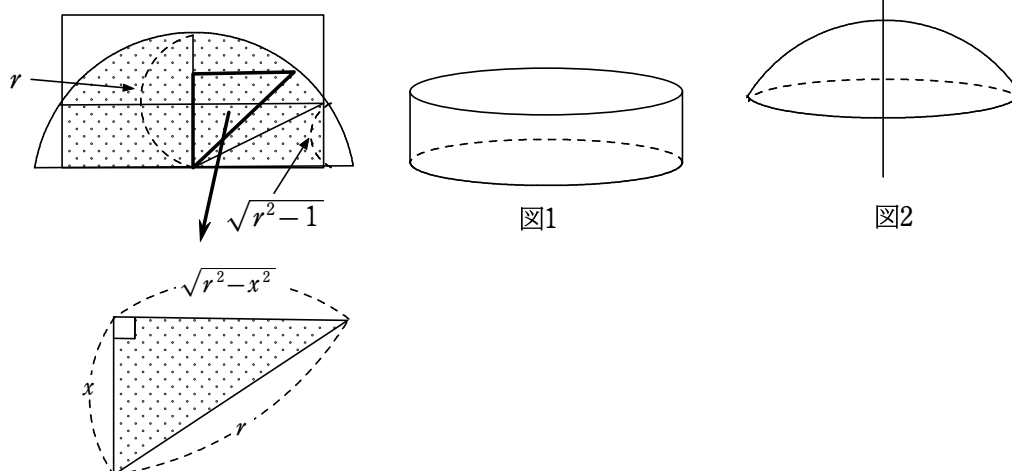


問題を読んだイメージは上のようなものであろう。要するに場合分けが必要、ということである。

- (i) $0 < r \leq 1$ のとき

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 \dots\dots ①$$

- (ii) $1 < r \leq \sqrt{3}$ のとき



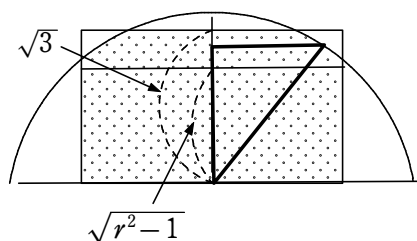
上図（断面図）から共通部分は底面の半径1、高さ $\sqrt{r^2-1}$ の円柱の体積（図1）と半径 r の球の一部分の体積（図2）を加えたものになる。

図2の体積は積分を使って求める。すなわち、円柱の底面の中心から垂直に x 軸を取って底面の中心を原点と置き、共通部分の円柱の高さを x とし、その切り口の円の面積を $x: \sqrt{r^2-1} \rightarrow r$ まで定積分をして求めることにする。

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi\sqrt{r^2-1} + \int_{\sqrt{r^2-1}}^r \pi(r^2-x^2)dx = \pi\sqrt{r^2-1} + \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{r^2-1}}^r \\ &= \pi\sqrt{r^2-1} + \pi\left\{r^3 - \frac{1}{3}r^3 - r^2\sqrt{r^2-1} + \frac{1}{3}(r^2-1)\sqrt{r^2-1}\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \pi (r^3 - r^2 \sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{r^2 - 1}) \dots\dots ②$$

(iii) $\sqrt{3} < r \leq 2$ のとき



(ii) と同様にして、2つの部分に分けて考える。

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi \sqrt{r^2 - 1} + \int_{\sqrt{r^2 - 1}}^{\sqrt{3}} \pi (r^2 - x^2) dx = \pi \sqrt{r^2 - 1} + \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\sqrt{r^2 - 1}}^{\sqrt{3}} \\ &= \pi \sqrt{r^2 - 1} + \pi \left\{ \sqrt{3} r^2 - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} - r^2 \sqrt{r^2 - 1} + \frac{1}{3} (r^2 - 1) \sqrt{r^2 - 1} \right\} \\ &= \pi (r^2 - 1) \left(-\frac{2}{3} \sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{3} \right) \dots\dots ③ \end{aligned}$$

(iv) $r > 2$ のとき 直円柱がすっぽり入るので、直円柱の体積が $V(r)$ となる。

$$V(r) = \sqrt{3} \pi \dots\dots ④$$

①、②、③、④より求める体積は

$$\left. \begin{aligned} 0 < r \leq 1 \text{ のとき} \quad V(r) &= \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi r^3 \\ 1 < r \leq \sqrt{3} \text{ のとき} \quad V(r) &= \frac{2}{3} \pi (r^3 - r^2 \sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{r^2 - 1}) \\ \sqrt{3} < r \leq 2 \text{ のとき} \quad V(r) &= \pi (r^2 - 1) \left(-\frac{2}{3} \sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{3} \right) \\ r > 2 \text{ のとき} \quad V(r) &= \sqrt{3} \pi \end{aligned} \right\} \text{(答)}$$

それではPythonで分析してみる。ここではPythonの SymPy を使って、不定積分が出来る、ということを示そう。

-----touhoku_22_06_NO 1 -----

```
from sympy import integrate, Symbol, pi, sqrt
from fractions import Fraction
r = Symbol('r')
x = Symbol('x')
ans1 = Fraction(2,3)*pi*r**2
ans2 = pi*sqrt(r**2-1)+integrate(pi*(r**2-x**2),(x,sqrt(r**2-1),r))
ans3 = pi*sqrt(r**2-1)+integrate(pi*(r**2-x**2),(x,sqrt(r**2-1),sqrt(3)))
ans4 = pi*sqrt(3)
```

```
display("0 < r <= 1 のとき:", ans1)
display("1 <= r < √3 のとき:", ans2)
display("√3 <= r < 2 のとき:", ans3)
display("2 <= r のとき:", ans4)
```

-----python program-----

[出力]

'0 < r <= 1 のとき:'

$$\frac{2\pi}{3}r^2$$

'1 <= r < √3 のとき:'

$$\frac{2\pi}{3}r^3 - \pi r^2 \sqrt{r^2 - 1} + \frac{\pi}{3}(r^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + \pi \sqrt{r^2 - 1}$$

'√3 <= r < 2 のとき:'

$$-\pi r^2 \sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{3}\pi r^2 + \frac{\pi}{3}(r^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + \pi \sqrt{r^2 - 1} - \sqrt{3}\pi$$

'2 <= r のとき:'

$$\sqrt{3}\pi$$

この出力結果は、Jupyter Notebook で実行し、スクリーンショットをしたものを添付した。

以上で[6]の解説を終わる。

[1]~[6]を振り返って、面白い問題と思うのは[1]である。他の問題はベクトルや数学Ⅲの内容をより深く理解するには良問であり、ちょっとアレンジして高校での定期考査に出題してもExcellentな高校生ならば程良い問題と思う。[1]の面白いところは、問題自体が非常にシンプルであり、どうやっても解けそうだけど、簡単に解ける方法を考え出すところが面白い。10人いたら10通りの解法があるように思う。決して私が示した解き方がベストとは思わない。むしろもっと面白い解き方を見つけた人がいたならば、その人の解法を見て、さすがですね、と唸ってみたい。

私が、高校時代から数学が面白いと思ったところは、地位や年齢に関係なく、みんな同じ土俵で戦える、というところである。しかし、他の自然科学や社会科学では、ある程度豊富な知識が必要となって、やはり歳の人の方が有利となるだろう。その点、数学は新しい発想で解決の糸口をつかめたりする。それで、私は大学で数学を専攻したが、立ちはだかる現代数学のエベレストよりも高い山を乗り越えることが出来なかった、というよりもその高さに圧倒されて登ることさえしなかった。

自分がどんなに頑張っても凡人でしかありえない、と悟ったのは、大学で数学を専攻したおかげである。この悟りで、その後挫折があっても、凡人だからしょうがないか、とすぐに気持ちを切り替えることができ、数学を専攻したことに後悔はない。以上で東北大の解説は終わる。