

2022年度 京都大学 数学(理)

EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

京都大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代なら、まるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに6題を続けて考えきる知力・体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力・体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、普通の人である著者の解説本の方が分かりやすいのではないかと自画自賛しながら書いている。

1

(30 点)

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

[証明] まずは、 5.4 あるいは 5.5 が $\log_4 a$ の形にならないかを考える。

すると、 $5.5 = 5.5 \log_4 4 = \log_4 4^{5.5} = \log_4 4^{\frac{11}{2}} = \log_4 2^{11} = \log_4 2048$ となる。

$y = \log_4 x$ は単調増加なので、 $\log_4 2022 < \log_4 2048$ となって、

これより、 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ の後半部分の $\log_4 2022 < 5.5$ が証明される。

次に、 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ の前半部分 $5.4 < \log_4 2022$ の証明を考える。

上と同様に変形すると、 $5.4 = \log_4 2^{10.8}$ となるので、

$2^{10.8} < 2022$ となることの証明を考えることにする。

ここで $p = \frac{2022}{2^{10.8}}$ において、この p と 1 との大小関係を調べることにする。

さらに、「 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい」とあるので、この常用対数をとる。

すると $p = \frac{2022}{2^{10.8}} = \frac{1011}{2^{9.8}}$ 、これより $\log_{10} p = \log_{10} 1011 - 9.8 \log_{10} 2 \dots\dots ①$

この式の中の $\log_{10} 1011$ は、 $1011 > 1000$ なので $\log_{10} 1011 > 3 \dots\dots ②$ となり、

$9.8\log_{10}2$ は、 $0.301 < \log_{10}2 < 0.3011$ より
 $2.9498 < 9.8\log_{10}2 < 2.95078 \dots\dots$ ③である。
 ②、③より $\log_{10}1011 > 3 > 2.95078 > 9.8\log_{10}2 > 2.9498$ なので
 $\log_{10}1011 > 9.8\log_{10}2$ となる。
 ①より $\log_{10}p = \log_{10}1011 - 9.8\log_{10}2 > 0$ すなわち $p > 1$ となる。
 これより $p = \frac{2022}{2^{10.8}} > 1$ すなわち $2^{10.8} < 2022$ となり、 $\log_4 4^{5.4} < \log_4 2022$ となって、
 $5.4 < \log_4 2022$
 以上より $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ となる。 [証明終り]

この問題は、それ程苦もなく考える道筋は見えてくるだろう。つまり、考えるヒントがいろいろと散らばっている。まず $\log_4 2022$ の底4を見て、何故2ではないのか、を考える。 $4=2^2$ であることから、やはり2がキーワードいやキーナンバーとなるのだろう。このとき、 $2022 \div 2 = 1011$ を使うのかな、と思う。ここで $1024=2^{10}$ であり、さらに問題文の中に「 $0.301 < \log_{10}2 < 0.3011$ を用いてよい」とあるので、底10の常用対数を見ると $\log_{10}1000 = \log_{10}10^3 = 3$ である。これらから、 $1000 < 1011 < 1024$ から証明ができるな、と考え、上のような証明にたどり着いた。

次にPythonでこれを分析してみようと思うが、この問題は $\log_4 2022$ の値を表示するものしか思いつかなかった。それが以下のプログラムである。

```

-----kyoto_22_01_NO 1 -----
import math
r=math.log(2022,4)
print(r)
-----python program-----
[出力]
5.490783640951507
    
```

これだけでは、Pythonで分析した、とは言えないだろうが、ここではPythonでの $\log_a M$ の関数に関するものを以下に列挙する。

- 基本形は上のプログラムにあるように、 $a^r = M \Leftrightarrow r = \text{math.log}(M, a)$ である。
- $r = \text{math.log}(M)$ と底 a を省略したときは、自然対数となる。
- 自然対数の底 $e = 2.718281828459045\dots$ をPythonで使いたい場合は、 math.e である。
- 底10の省略(常用対数)は $r = \text{math.log10}(M)$ で、底2の省略は $r = \text{math.log2}(M)$ である。
- $y = \log_a x$ のグラフを描くとき、 x の型が *array* になるが、そのときは numpy ライブラリを使う。例えば、`import numpy as np` としたならば、その関数は $r = \text{np.log}(M)$ のようになる。

以上で 1 の解説は終わる。

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし $n \geq 5$ とし、同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し、札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき、 $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ となる確率を求めよ。

[解法] 箱から取り出した 3 枚は

X

Y

Z

 $X < Y < Z$ となって、取り出した 3 枚のカードは隣同士にはない確率、を求めることなのだ、と理解した。

このとき、 $Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ というのは直接考えるとかなり面倒なことになるな、と予想するので、この余事象を使って解いてみようと考えた。

$Y - X \geq 2$ かつ $Z - Y \geq 2$ の余事象は

$Y - X < 2$ または $Z - Y < 2$ すなわち $Y - X = 1$ または $Z - Y = 1$ である。

すなわち、3 枚のカードの少なくともどれかが隣同士になっている、という事象である。

(i) $Y - X = 1$ すなわち X と Y が隣同士のとき

X と Y が隣同士で、さらに Z があるので

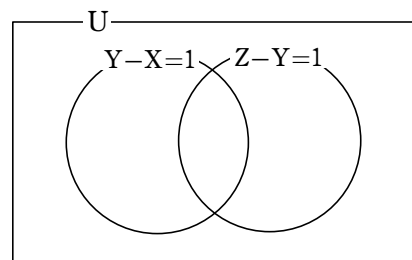
(X, Y) の場合の数は $n - 2$ 通りである。

さらに、 X の番号が k のとき、 Z の取り得るカードは $(n - 1 - k)$ 通りある。

これより、 X と Y が隣同士になるのは、

$$\sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k) = (n-1)(n-2) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ 通りである。}$$



(ii) $Z - Y = 1$ すなわち Y と Z が隣同士のとき

Y と Z が隣同士で、さらに X があるので (Y, Z) は $n - 2$ 通りの組合せがあり、

Y の番号が k のとき、 Z の取り得るカードは $(n - 1 - k)$ 通りある。

(i) と同様にして Y と Z が隣同士になるのは、 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 通りである。

(iii) $Y - X = 1$ かつ $Z - Y = 1$ のとき

連続する (X, Y, Z) は $n - 2$ 通りである。

以上より $Y - X = 1$ または $Z - Y = 1$ のときは $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 - (n-2) = (n-2)^2$ 通りとなる。

よって、求める確率は $1 - \frac{(n-2)^2}{nC_3} = 1 - \frac{6(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 7n + 12}{n(n-1)} = \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$ (答)

この問題のPythonでの分析をどうするのか、全く思いつかないので、以上で[2]の解説は終わる。

n を自然数とする. 3 つの整数 $n^2 + 2$, $n^4 + 2$, $n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ.

[解法] n は限りなく大きくなる自然数なのに、最大公約数が求められる、ということは n の値によって最大公約数が限られ、さらに巡回するのかな、と予想する。それを、具体的に求めてイメージを掴んでみよう、と思う。

$n=1$ のとき $n^2+2=1+2=3$, $n^4+2=1+2=3$, $n^6+2=1+2=3$ より、
最大公約数は 3

$n=2$ のとき $n^2+2=4+2=6$, $n^4+2=16+2=18$, $n^6+2=64+2=66$ より、
最大公約数は 6

$n=3$ のとき $n^2+2=9+2=11$, $n^4+2=81+2=83$, $n^6+2=729+2=731=17 \cdot 43$ より、
最大公約数は 1

この時点では全く予想がつかない。さらに計算を試みる。

$n=4$ のとき $n^2+2=16+2=18$, $n^4+2=256+2=258$, $n^6+2=4096+2=4098$ より、
最大公約数は 6

ここで、少なくとも n が偶数、奇数で最大公約数が異なり、 n が偶数のときは 6 になるのでは、と予想される。 $n=5$ のときも調べてみたくなるが、計算が大変そうなので、ここで少なくとも n が奇数か偶数かによって違うので、まずはその場合分けをして考える

※この偶数、奇数の場合分けのとき、偶数は、 $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) とするのは普通であるが、奇数を $n=2k-1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) とするか、 $n=2k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) とするか、いつも迷う。この問題では、余りが関係すると思うので、 $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) として $n=1$ だけを別に考えた方が、答案がスッキリするだろう。

(i) $n=2k$ (ただし、 $k=1, 2, 3, \dots$) のとき

$$n^2+2=4k^2+2=2(2k^2+1)$$

$$n^4+2=16k^4+2=2(8k^4+1)$$

$$n^6+2=64k^6+2=2(32k^6+1)$$

ここで、 $2k^2+1$, $8k^4+1$, $32k^6+1$ が少なくとも 3 の倍数になることを示さないと、6 の倍数にはならない。ここで、2、8、32 の係数に着目すると、 $2 \equiv 8 \equiv 32 \pmod{3}$ である。

この合同式について、教科書の内容を以下に示す。

-----数学A（数研出版）-----

発展 補足 合同式

一般に、 m を正の整数とし、2 つの整数 a , b を m で割ったときの余りを、それぞれ r , r' とすると、次のことが成り立つ。

- | |
|--|
| <p>1 $a+b$ を m で割った余りは, $r+r'$ を m で割った余りに等しい。</p> <p>2 $a-b$ を m で割った余りは, $r-r'$ を m で割った余りに等しい。</p> <p>3 ab を m で割った余りは, rr' を m で割った余りに等しい。</p> |
|--|

更に, k を正の整数とすると, 次のことが成り立つ。

- 4 a^k を m で割った余りは, r^k を m で割った余りに等しい。

整数の割り算やその余りについて考察するとき, 次の「合同式」を用いると, 表記が簡潔になり, 考察もしやすくなる。

m は正の整数とする。2つの整数 a, b について $a-b$ が m の倍数であるとき, a と b は m を法として合同であるといい, 式で

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。このような式を 合同式 という。 a と b が m を法として合同であるとは, a を m で割った余りと, b を m で割った余りが等しいということと同じである。

-----ここまで「数学A (数研出版)」からの引用-----

ここで, $2k^2+1, 8k^4+1, 32k^6+1$ は, $2 \equiv 8 \equiv 32 \pmod{3}$ で, 3 以外の法で合同になる数はない。すなわち, $2k^2+1 \equiv 8k^4+1 \equiv 32k^6+1 \pmod{i}$ となる自然数 i は 3 以外にはない。

つまり, $2k^2+1$ と $8k^4+1$ と $32k^6+1$ は互いに素 または $2k^2+1$ と $8k^4+1$ と $32k^6+1$ の共通の因数が 3 である可能性の 2通りしかない。

これより, $n^2+2 = 2(2k^2+1)$ と $n^4+2 = 2(8k^4+1)$ と $n^6+2 = 2(32k^6+1)$ の最大公約数は 2 または 6 となる可能性の 2通りである。

これより, $2k^2+1, 8k^4+1, 32k^6+1$ は k を 3 で割った余りによって, さらに場合分けをすると, $k \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $2k^2+1 \equiv 8k^4+1 \equiv 32k^6+1 \equiv 1 \pmod{3}$ なので

$2k^2+1$ と $8k^4+1$ と $32k^6+1$ は互いに素となり

$$n^2+2 = 2(2k^2+1) \text{ と } n^4+2 = 2(8k^4+1) \text{ と } n^6+2 = 2(32k^6+1)$$

の最大公約数は 2 である。

$k \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $2k^2 \equiv 8k^4 \equiv 32k^6 \equiv 2 \pmod{3}$ なので

$$2k^2+1 \equiv 8k^4+1 \equiv 32k^6+1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ となり、}$$

$2k^2+1$ と $8k^4+1$ と $32k^6+1$ の共通の因数は 3 となり

$$n^2+2 = 2(2k^2+1) \text{ と } n^4+2 = 2(8k^4+1) \text{ と } n^6+2 = 2(32k^6+1)$$

の最大公約数は 6 である。

$k \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $k^2 \equiv k^4 \equiv k^6 \equiv 1 \pmod{3}$ より, $2k^2 \equiv 8k^4 \equiv 32k^6 \equiv 2 \pmod{3}$ となるので,

$$2k^2+1 \equiv 8k^4+1 \equiv 32k^6+1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ となり、}$$

$2k^2+1$ と $8k^4+1$ と $32k^6+1$ の共通の因数は 3 となり

$$n^2+2 = 2(2k^2+1) \text{ と } n^4+2 = 2(8k^4+1) \text{ と } n^6+2 = 2(32k^6+1)$$

の最大公約数は 6 である。

(ii) $n=2k+1$ (ただし、 $k=1, 2, 3, \dots$) のとき

$$n^2+2=(2k+1)^2+2$$

$$n^4+2=(2k+1)^4+2$$

$$n^6+2=(2k+1)^6+2$$

(i) と同様にして場合分けをすると、

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } (2k+1)^2+2 \equiv (2k+1)^4+2 \equiv (2k+1)^6+2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$(2k+1)^2+2$ と $(2k+1)^4+2$ と $(2k+1)^6+2$ の共通の因数は 3 となり、
これより最大公約数は 3。

$$k \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } (2k+1)^2 \equiv (2k+1)^4 \equiv (2k+1)^6 \equiv 0 \pmod{3} \text{ となるので、}$$

$$(2k+1)^2+2 \equiv (2k+1)^4+2 \equiv (2k+1)^6+2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\text{すなわち } (2k+1)^2+2 \equiv (2k+1)^4+2 \equiv (2k+1)^6+2 \equiv 0 \pmod{i}$$

となる法 i は存在しない。

$(2k+1)^2+2$ と $(2k+1)^4+2$ と $(2k+1)^6+2$ は互いに素となり、
これより最大公約数は 1。

$$k \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } (2k+1)^2 \equiv (2k+1)^4 \equiv (2k+1)^6 \equiv 1 \pmod{3} \text{ となるので、}$$

$$(2k+1)^2+2 \equiv (2k+1)^4+2 \equiv (2k+1)^6+2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$(2k+1)^2+2$ と $(2k+1)^4+2$ と $(2k+1)^6+2$ の共通の因数は 3 となり、
最大公約数は 3。

ここで $k=0$ すなわち $n=1$ のとき、先に示したように最大公約数は 3 となり (ii) の $k \equiv 0 \pmod{3}$ のときに含まれる。以上より n を法 6 の場合分けでまとめると

- | | |
|---|-------|
| ① $n \equiv 1 \pmod{6}$ のとき、最大公約数 $A_n = 3$ | } (答) |
| ② $n \equiv 2 \pmod{6}$ のとき、最大公約数 $A_n = 6$ | |
| ③ $n \equiv 3 \pmod{6}$ のとき、最大公約数 $A_n = 1$ | |
| ④ $n \equiv 4 \pmod{6}$ のとき、最大公約数 $A_n = 6$ | |
| ⑤ $n \equiv 5 \pmod{6}$ のとき、最大公約数 $A_n = 3$ | |
| ⑥ $n \equiv 0 \pmod{6}$ のとき、最大公約数 $A_n = 2$ | |

次にPythonでこれを分析してみよう。やはり、実際に n の値を代入して、3つの数の最大公約数が上の答え通りになるか、検証してみる。それが以下のプログラムである。

```
-----kyo to_22_03_NO 1-----  
import math  
for n in range(1,31):  
    a1=n**2+2  
    a2=n**4+2  
    a3=n**6+2  
    an=math.gcd(a1,a2,a3)  
    print("n=",n," のとき 3つの整数は ",a1,a2,a3," 最大公約数は ",an)  
-----python program-----
```

[出力]

n = 1 のとき 3つの整数は 3 3 3 最大公約数は 3
n = 2 のとき 3つの整数は 6 18 66 最大公約数は 6
n = 3 のとき 3つの整数は 11 83 731 最大公約数は 1
n = 4 のとき 3つの整数は 18 258 4098 最大公約数は 6
n = 5 のとき 3つの整数は 27 627 15627 最大公約数は 3
n = 6 のとき 3つの整数は 38 1298 46658 最大公約数は 2
n = 7 のとき 3つの整数は 51 2403 117651 最大公約数は 3
n = 8 のとき 3つの整数は 66 4098 262146 最大公約数は 6
n = 9 のとき 3つの整数は 83 6563 531443 最大公約数は 1
n = 10 のとき 3つの整数は 102 10002 1000002 最大公約数は 6
n = 11 のとき 3つの整数は 123 14643 1771563 最大公約数は 3
n = 12 のとき 3つの整数は 146 20738 2985986 最大公約数は 2
n = 13 のとき 3つの整数は 171 28563 4826811 最大公約数は 3
n = 14 のとき 3つの整数は 198 38418 7529538 最大公約数は 6
n = 15 のとき 3つの整数は 227 50627 11390627 最大公約数は 1
n = 16 のとき 3つの整数は 258 65538 16777218 最大公約数は 6
n = 17 のとき 3つの整数は 291 83523 24137571 最大公約数は 3
n = 18 のとき 3つの整数は 326 104978 34012226 最大公約数は 2
n = 19 のとき 3つの整数は 363 130323 47045883 最大公約数は 3
n = 20 のとき 3つの整数は 402 160002 64000002 最大公約数は 6
n = 21 のとき 3つの整数は 443 194483 85766123 最大公約数は 1
n = 22 のとき 3つの整数は 486 234258 113379906 最大公約数は 6
n = 23 のとき 3つの整数は 531 279843 148035891 最大公約数は 3
n = 24 のとき 3つの整数は 578 331778 191102978 最大公約数は 2
n = 25 のとき 3つの整数は 627 390627 244140627 最大公約数は 3
n = 26 のとき 3つの整数は 678 456978 308915778 最大公約数は 6
n = 27 のとき 3つの整数は 731 531443 387420491 最大公約数は 1
n = 28 のとき 3つの整数は 786 614658 481890306 最大公約数は 6
n = 29 のとき 3つの整数は 843 707283 594823323 最大公約数は 3
n = 30 のとき 3つの整数は 902 810002 729000002 最大公約数は 2

答え通り綺麗に並んでいる。ここでPythonでの最大公約数を求める関数は

`math.gcd(a1,a2,a3)` である。

以前のPythonのバージョンでは2つの数までしか求められなかったが、今では3つ以上の数の最大公約数を求めることができる。以上で [3] の解説は終わる。

四面体 OABC が

$$OA = 4, \quad OB = AB = BC = 3, \quad OC = AC = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする. P を辺 BC 上の点とし, $\triangle OAP$ の重心を G とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$ を示せ.

(2) P が辺 BC 上を動くとき, PG の最小値を求めよ.

[解法] (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく.

点 P が線分 BC 上にあるので $\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ とおける.

さらに、 $\triangle OAP$ の重心が G なので

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}}{3} \text{ となり、}$$

$$\begin{aligned} \text{これより } \overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}}{3} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OP}}{3} \\ &= \frac{\vec{a} - 2\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}}{3} \\ &= \frac{\vec{a} - 2(1-t)\vec{b} - 2t\vec{c}}{3} \text{ となるので} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{OA} &= \frac{\vec{a} - 2(1-t)\vec{b} - 2t\vec{c}}{3} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{1}{3} \{ |\vec{a}|^2 - 2(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - 2t\vec{a} \cdot \vec{c} \} \dots\dots ① \end{aligned}$$

ここで $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ とおくと、 $\triangle OAB$ において

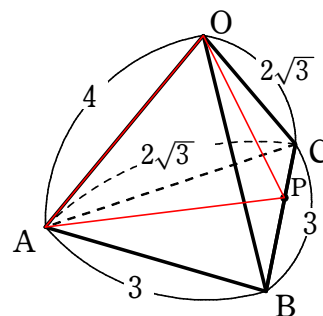
$$\cos \theta = \frac{16 + 9 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad \text{これより } \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 8$$

さらに $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角 θ' とおくと、 $\triangle OAC$ において

$$\cos \theta' = \frac{16 + 12 - 12}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{これより } \vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 8$$

$$\text{これらを①に代入すると } \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3} \{ 16 - 2(1-t) \cdot 8 - 2t \cdot 8 \} = 0$$

よって、 $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$ となる。…… (答)



(2) (1) から $|\overrightarrow{PG}| = \left| \frac{\vec{a} - 2(1-t)\vec{b} - 2t\vec{c}}{3} \right|$ の両辺を 2 乗して、 t の関数が 2 次関数になって、

それから最小値を求めることは出来るが、普通、このような問題の流れとしては (1) の結論、

$\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{OA}$ を使ったら簡単に解けるのだらうと予想される。図を見ると、 $\triangle OAP$ において、辺 OA を底辺としたら、高さは直線 PG 上にある。つまり、直線 PG と辺 BC が垂直に交わるとき、 PG の長さが最小になる。これを使って解くとして。

$\overrightarrow{PG}$ と $\overrightarrow{BC}$ が垂直になるとき $\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

ここで $\overrightarrow{PG} = \frac{\vec{a} - 2(1-t)\vec{b} - 2t\vec{c}}{3}$ なので

$$\frac{\vec{a} - 2(1-t)\vec{b} - 2t\vec{c}}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - 2(1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} - 2t|\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 2(1-t)|\vec{b}|^2 + 2t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

ここで、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 6$ なので

$$8 - 2(1-t) \cdot 6 - 2t \cdot 12 - 8 + 2(1-t) \cdot 9 + 2t \cdot 6 = 0$$

これを解くと $t = \frac{1}{3}$

このとき $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b} - \frac{2}{9}\vec{c}$ になるので

$$|\overrightarrow{PG}|^2 = \left| \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b} - \frac{2}{9}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{81}(9|\vec{a}|^2 + 16|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b} \cdot \vec{c} - 12\vec{a} \cdot \vec{c}) = \frac{16}{9}$$

よって、 $t = \frac{1}{3}$ のとき PG の最小値は $\frac{16}{9}$ …… (答)

次に Python でこれを分析してみようと思うが、ここでは、この問題にある四面体を描画するプログラムを提示する。その為には 4 頂点の座標を求めるが、それはベクトルを使った手計算でした。その過程は割愛するが、 $A(0, 0, 0)$ 、 $B(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0)$ 、 $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$ 、 $D\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{2}\right)$ となった。この結論を使って四面体を表示する、というプログラムが以下である。

-----kyo to_22_04_NO 1-----

```
import numpy as np
```

```
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
fig = plt.figure(figsize = (6, 6))
```

```
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

```
ax.set_title("Kyoto University 2022 Math qu.4", fontsize = 16)
```

```
ax.set_xlabel("x", size = 16, color = "b")
```

```
ax.set_ylabel("y", size = 16, color = "b")
```

```
ax.set_zlabel("z", size = 16, color = "b")
```

```
vertexes = np.array([[0, 0, 0],
                    [np.sqrt(6), np.sqrt(3), 0],
                    [0, 2*np.sqrt(3), 0],
                    [2*np.sqrt(6)/3, 4*np.sqrt(3)/3, 2*np.sqrt(2)]])
```

```
Z = vertexes
```

```
d = [0,4]
```

```
X, Y = np.meshgrid(d, d)
```

```
ax.scatter3D(Z[:, 0], Z[:, 1], Z[:, 2])
```

```
surf = [[Z[0],Z[1],Z[2]], [Z[0],Z[1],Z[3]], [Z[0],Z[2],Z[3]], [Z[1],Z[2],Z[3]]]
```

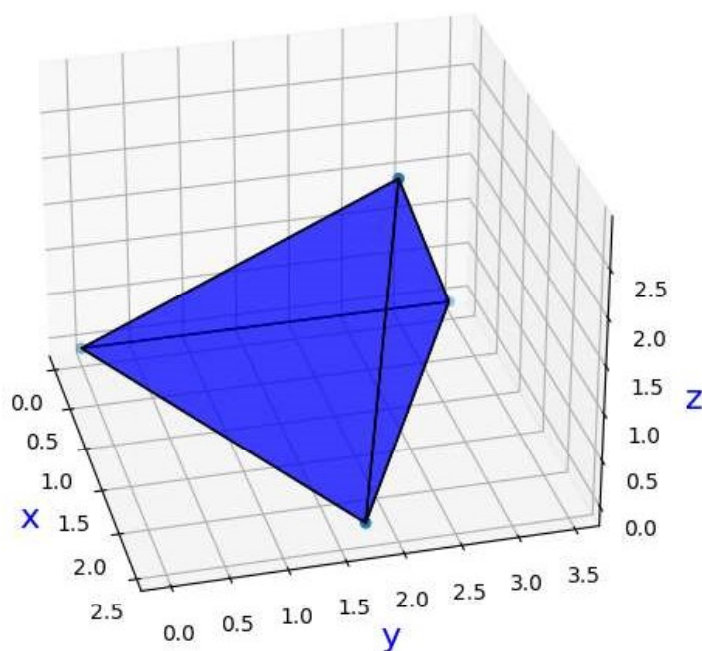
```
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(surf, facecolors='blue', linewidths=1, edgecolors='k', alpha=0.5))
```

```
plt.show()
```

-----python program-----

[出力]

Kyoto University 2022 Math qu.4



三角錐を表示するのは簡単そうであるが、実はそうでもない。関数で与えられたのをグラフとして描画する方が楽であり、さらにそれが初めて表示されるときは、驚きと感動を覚えるときがある。

以上で [4] の解説は終わる。

5

(35 点)

曲線 $C: y = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とし, C 上の点 $Q(t, \cos^3 t)$ と原点 O , および $P(t, 0)$, $R(0, \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 $OPQR$ の面積を $f(t)$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) S を求めよ.

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ. そのときの t を α とすると, $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ.

(3) $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ を示せ.

$$(1) \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$$

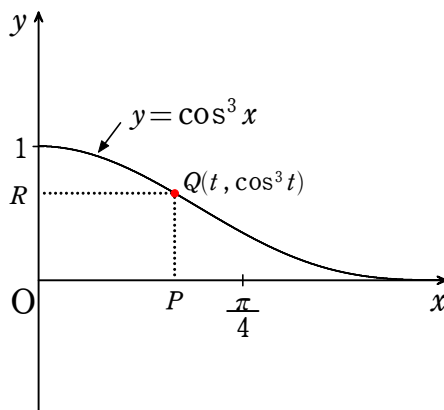
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

ここで $\sin x = t$ とおくと $\cos x \, dx = dt$

さらに, $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $x: 0 \rightarrow 1$ なので

$$S = \int_0^1 (1 - t^2) \, dt$$

$$= \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \dots\dots (\text{答})$$



(2) 図より $f(t) = t \cos^3 t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)

$$f'(t) = \cos^3 t + 3t \cos^2 t (-\sin t) = \cos^2 t (\cos t - 3t \sin t)$$

ここで $g(t) = \cos t - 3t \sin t$ とおくと

$$g'(t) = -\sin t - 3 \sin t - 3t \cos t = -(4 \sin t + 3t \cos t) < 0 \quad \left[\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right]$$

すなわち $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において, $y = g(t)$ は単調減少関数となる。

さらに $g(0) = 1 > 0$ と $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}\pi < 0$ から,

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $g(t) = 0$ となる実数 t が存在する。

その値を α とおくと $g(\alpha) = \cos \alpha - 3\alpha \sin \alpha = 0$ 、これより $\alpha = \frac{\cos \alpha}{3 \sin \alpha}$ となる。

これを使って $y = f(t)$ の増減表を作ると

t	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	極大	↘	0

となって、表から極大値 $f(\alpha)$ が最大値となる。

よって、その最大値は $f(\alpha) = \alpha \cos^3 \alpha = \frac{\cos \alpha}{3 \sin \alpha} \cdot \cos^3 \alpha = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha} \dots\dots$ (答) である。

$$(3) \quad (2) \text{ の } y' = f'(t) \text{ に } t = \frac{\pi}{6} \text{ を代入すると } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{6} - 3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ = \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3(2\sqrt{3} - \pi)}{16} > 0$$

これより (2) の増減表から、 $0 < \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ となる。

次に、 $y = f(\alpha) = h(\alpha)$ として、 y を α の関数として、 α で微分すると

$$y' = \frac{4 \cos^3 \alpha (-\sin \alpha) \sin \alpha - \cos^4 \alpha \cos \alpha}{3 \sin^2 \alpha} = \frac{-\cos^3 \alpha (4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}$$

これは $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ において $y' < 0$ 、すなわち $y = h(\alpha)$ は単調減少になる。

これより $0 < \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ において $h\left(\frac{\pi}{6}\right) < h(\alpha)$ となって

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos^4 \frac{\pi}{6}}{3 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} \text{ なので } h(\alpha) < \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16}, \text{ さらに } S = \frac{2}{3} \text{ より}$$

よって、 $\frac{h(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ すなわち $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16} \dots\dots$ (答) となる。

次にPythonでこれを分析する。まず (1) の $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$ をPythonで計算するが、最初に不定積分の答えを表示し、次に定積分を計算し、それを分数の形で表示する。

-----kyo to_22_05_NO 1 -----

```
import numpy as np
from sympy import integrate, Symbol
from fractions import Fraction
x = Symbol('x')
S = 'cos(x)**3'
Sx = integrate(S,x)
Sa = integrate(S, (x, 0, np.pi/2))
Sb = Fraction(float(Sa))
Ss = Sb.limit_denominator(10)
print("Sの不定積分：", Sx)
print("Sの定積分：", Ss)
```

Sa をそのまま表示したら 0.6666667 となるので、それを分数の表示にする。
SaをFractionで扱える型にして、それを分数にするが、しかし、このまま表示すると 3002399751580331/4503599627370496 となる。
つまり、Sb.limit_denominator(10)は無限小数の桁数を指定して分数の形にしている。

-----python program-----

[出力]

Sの不定積分： $-\sin(x)**3/3 + \sin(x)$ Sの定積分： $2/3$

出力結果の $-\sin(x)**3/3 + \sin(x)$ は $-\frac{\sin^3 x}{3} + \sin x$ の意味である。次に (2) の解法にある

$f(t) = t \cos^3 t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描き、その最大となる座標を求める。

-----kyo to_22_05_NO 2-----

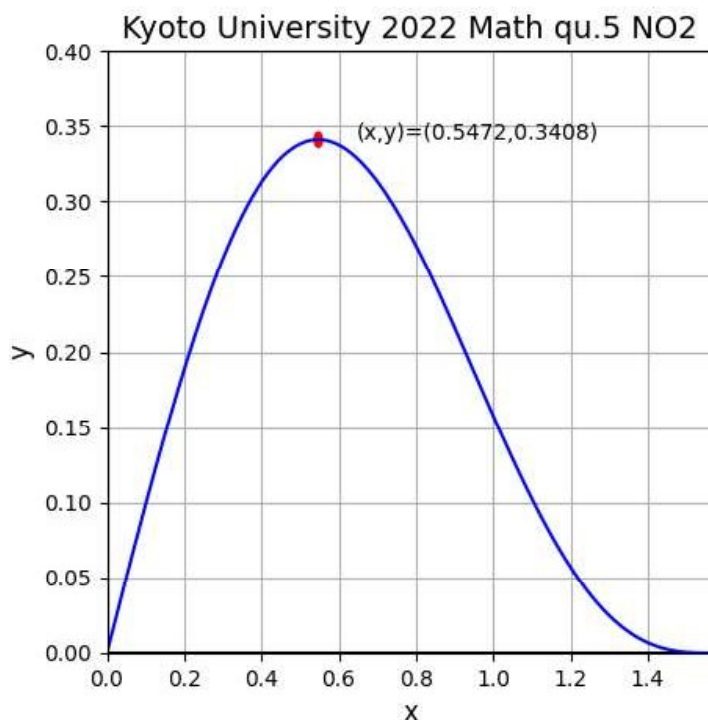
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patches
def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title, x_label = "x", y_label = "y"):
    ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
    ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
    ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
    ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
    ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
    ax.grid()
    ax.axhline(0, color = "black")
    ax.axvline(0, color = "black")
fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
title1 = "Kyoto University 2022 Math qu.5 NO2"
descartes(ax, [0, np.pi/2], [0, 0.4], title1)

t=np.linspace(0,np.pi/2,10240000)
y=t*np.cos(t)**3
ax.plot(t,y , color = "blue")
b=max(y)
max_index = np.argmax(y)
a1=np.pi/20480000*(max_index)
a2=np.pi/20480000*(max_index+1)
a=(a1+a2)/2
c = patches.Ellipse(xy=(a, b), width=0.02, height=0.01, fc='r', ec='r')
ax.add_patch(c)
ax.text(a+0.1,b,"(x,y)=( {:.4f},{:.4f})".format(a,b))

print(a,b)
plt.show()
```

-----python program-----

[出力]



グラフにあるように最大値の座標は $(0.5471607460665688, 0.34079747220023354)$ とPythonでは計算されたが、グラフでは小数点以下4桁までを表記している。

(2) の解答では、最大値は $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ である。さらに、 α は $\cos \alpha - 3\alpha \sin \alpha = 0$ の解である。

この α の値をPythonを使って求めてみる。

```
-----kyo to_22_05_NO 3 -----  
from scipy import optimize  
import numpy as np  
def f(x):  
    return np.cos(x)-3*x*np.sin(x)  
x=optimize.fsolve(f,0)  
print("cos(x)-3*x*sin(x)=0 の答えは ",x)  
-----python program-----
```

[出力]

```
cos(x)-3*x*sin(x)=0 の答えは [-0.54716076]
```

まず、答えが負の数である。これは $g(-\alpha) = \cos(-\alpha) - 3(-\alpha)\sin(-\alpha) = \cos \alpha - 3\alpha \sin \alpha = g(\alpha)$ となるので、答えは 0.54716076 としても問題はない。グラフでの値とSciPyでの値は完全に一致しないが、それは、グラフでの最大となる座標は、 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの分割の大きさによって、かなりの誤差が生じるからである。このプログラムでは最終的に1024万分割をして、最大となるindexの x 座標と次のindexの x 座標との相加平均を取って、SciPy で計算した値になんとか近づけたが、最初の1000分割では小数第3位までしか一致しなかった。SciPy のすごさには常に驚かされる。

(3) では、 $f(x) = \frac{\cos^4 x}{3 \sin x}$ のグラフを描いて、これが $\alpha = 0.54716076$ のとき、

$f(\alpha) < \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$ であることを視覚的に確かめてみる。

-----kyo to_22_05_NO 4-----

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patches
from scipy import optimize

def g(x):
    return np.cos(x)-3*x*np.sin(x)

def descartes(ax, ran_x, ran_y, ax_title,x_label = "x", y_label = "y"):
    ax.set_xlabel(x_label, fontsize = 12)
    ax.set_ylabel(y_label, fontsize = 12)
    ax.set_xlim(ran_x[0], ran_x[1])
    ax.set_ylim(ran_y[0], ran_y[1])
    ax.set_title(ax_title, fontsize = 14)
    ax.grid()
    ax.axhline(0, color = "black")
    ax.axvline(0, color = "black")

fig = plt.figure(figsize = (5, 5))
ax = fig.add_subplot(111)
title1 = "Kyoto University 2022 Math qu.5 NO4"

descartes(ax, [0,np.pi/2], [0, 2],title1)

t=np.linspace(0,np.pi/2,1000)
y=(np.cos(t)**4)/(3*np.sin(t))
ax.plot(t,y , color = "blue")

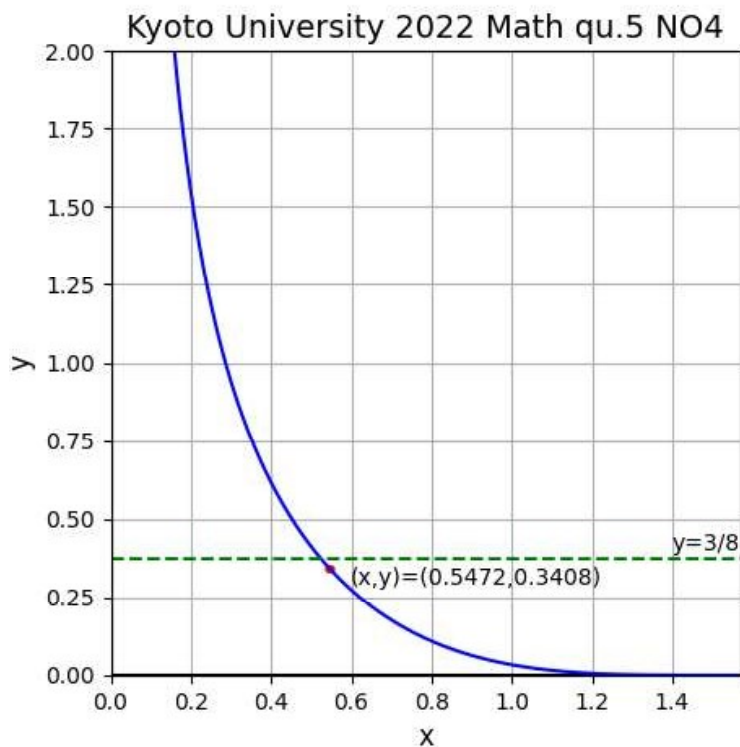
limit1=3/8
left = np.array([0, np.pi/2])
height = np.array([limit1, limit1])
ax.plot(left, height, linestyle="dashed",color="green")

a=float(abs(optimize.fsolve(g,0)))
b=float((np.cos(a)**4)/(3*np.sin(a)))
c = patches.Ellipse(xy=(a, b), width=0.02, height=0.02, fc='r',ec='r')
```

```
ax.add_patch(c)
ax.text(a+0.05,b-0.05,"(x,y)=( {:.4f},{:.4f} ".format(a,b))
ax.text(1.4,0.4,"y=3/8")
plt.show()
```

-----python program-----

[出力]



Python で様々な分析をしてみよう、という問題としては、非常に面白い問題である。これを創った先生は、多分そのような予想はしなかったと思うが、基本的なPython のテクニックが随所に使うことができ、解説を作っているこちら側も様々な面で勉強になった。

プログラミングと数学的な思考は切っても切れない関係であると改めて思い知らされた。少なくとも将来、情報系の仕事に就く人は、数学を学んでほしい。

数学って必要じゃないよな、というのをたまに耳にするが、じゃあ必要な科目って何なのだろうか。私は高校時代、社会科学系の勉強に全く興味が持てなかった。こんなの必要じゃない、と思っていた。数学は面白かったが、将来、必要になるなんてのは決して思っていなかった。要するに、必要か必要じゃないか、という問いかけは、自分が今、面白いと思うか思わないかだけの違いじゃないかな、とぼやっとこの歳になって考えている。私は、今、歴史が面白いと思っている。だから生徒たちには、みんな将来、歴史は必要になるよ、と言うだろう。数学は、当然、必要である、と言っている。昔から好きだから、という理由だけである。以上で [4](#) の解説は終わる。

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$y_{3m+1} = 3m, \quad y_{3m+2} = 3m + 2, \quad y_{3m+3} = 3m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める. このとき, 数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ.

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)$$

$$x_{n+1} - x_n = n + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\}$$

(i) $n = 3m + 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{3m} \left\{ k + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\} \\ &= \frac{3m(3m+1)}{2} + 2 \left\{ \cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_3}{3}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m}}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } x_2 = x_1 + 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) = 3$$

$$x_3 = x_2 + 2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) = 3 + 2 + 2 \cos(2\pi) = 7$$

$$x_4 = x_3 + 3 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_3}{3}\right) = 7 + 3 + 2 \cos\left(\frac{14}{3}\pi\right) = 9$$

$$x_5 = x_4 + 4 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_4}{3}\right) = 9 + 4 + 2 \cos(6\pi) = 15$$

$$x_6 = x_5 + 5 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_5}{3}\right) = 15 + 5 + 2 \cos(10\pi) = 22$$

$$x_7 = x_6 + 6 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_6}{3}\right) = 22 + 6 + 2 \cos\left(\frac{44}{3}\pi\right) = 27$$

$$\text{これより } n = 3m + 1 \text{ } (m = 1, 2, 3, \dots) \text{ のとき } \quad x_{3m+1} = 3l \quad (l \text{ は自然数}) \quad \dots\dots ①$$

$$n = 3m + 2 \text{ } (m = 1, 2, 3, \dots) \text{ のとき } \quad x_{3m+2} = 3i \quad (i \text{ は自然数}) \quad \dots\dots ②$$

$$n = 3m + 3 \text{ } (m = 1, 2, 3, \dots) \text{ のとき } \quad x_{3m+3} = 3j + 1 \quad (j \text{ は自然数}) \quad \dots\dots ③$$

と予想されるので, これらを数学的帰納法で証明する。

①の証明

[1] $m = 1$ のとき $x_4 = 9 = 3 \cdot 3$ より 成り立つ

[2] $m = k$ のとき $x_{3k+1} = 3l$ が成り立つと仮定すると

$$\text{漸化式より } x_{3k+2} = x_{3k+1} + 3k + 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi x_{3k+1}}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
x_{3k+2} &= 3l + 3k + 1 + 2\cos(2\pi l) \\
&= 3(l + k + 1) \\
&= 3l'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{漸化式より } x_{3k+3} &= x_{3k+2} + 3k + 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3k+2}}{3}\right) \\
&= 3l' + 3k + 2 + 2\cos(2\pi l') \\
&= 3(l' + k + 1) + 1 \\
&= 3l'' + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{漸化式より } x_{3k+4} &= x_{3k+3} + 3k + 3 + 2\cos\left(\frac{2\pi x_{3k+3}}{3}\right) \\
&= 3l'' + 1 + 3k + 3 + 2\cos\left(2\pi l'' + \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= 3l'' + 1 + 3k + 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 3(l'' + k + 1) \\
&= 3l'''
\end{aligned}$$

すなわち $m = k + 1$ のとき $x_{3(k+1)+1} = 3l'''$ が成り立つ。

[1] [2] より全ての自然数 m について

$n = 3m + 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) のとき $x_{3m+1} = 3l$ (l は自然数) となる。

②、③も同様にして証明できる。さらに、 $x_1 = 0$ 、 $x_2 = 3$ 、 $x_3 = 7$ なので $m = 0$ のときも成り立つ。

よって、 $n = 3m + 1$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) のとき $x_{3m+1} = 3l$ (l は自然数) ……①

$n = 3m + 2$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) のとき $x_{3m+2} = 3i$ (i は自然数) ……②

$n = 3m + 3$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) のとき $x_{3m+3} = 3j + 1$ (j は自然数) ……③

が成り立つ。

次に $x_1 = 0$ 、 $x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)$

$$x_{n+1} - x_n = n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)$$

このとき数列 $\{x_{n+1} - x_n\}$ は数列 $\{x_n\}$ の階差数列なので

$$n \geq 2 \text{ のとき } x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k + 2\cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k + 2\cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\}$$

(i) $n = 3m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{3m} \left\{ k + 2\cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\} \\
&= \frac{3m(3m+1)}{2} + 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_3}{3}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m}}{3}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{ここで、} \cos\left(\frac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m+2}}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3l}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3i}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi \cdot (3j+1)}{3}\right)$$

$$= 1 + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{3m(3m+1)}{2} + 2 \left\{ \cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_3}{3}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m}}{3}\right) \right\} \\
&= \frac{3m(3m+1)}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2}m \\
&= \frac{3m(3m+1)}{2} + 3m
\end{aligned}$$

また、 $y_n = y_{3m+1} = 3m$ なので、 $x_n - y_n = \frac{3m(3m+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

(ii) $n = 3m + 2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{3m+1} \left\{ k + 2\cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\} \\
&= \frac{(3m+1)(3m+2)}{2} + 2 \left\{ \cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_3}{3}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right) \right\} \\
&= \frac{(3m+1)(3m+2)}{2} + 2\left(\frac{3}{2}m + 1\right) \\
&= \frac{(3m+1)(3m+2)}{2} + 3m + 2
\end{aligned}$$

また、 $y_n = y_{3m+2} = 3m + 2$ なので、 $x_n - y_n = \frac{(3m+1)(3m+2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

(iii) $n = 3m + 3$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{3m+2} \left\{ k + 2\cos\left(\frac{2\pi x_k}{3}\right) \right\} \\
&= \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} + 2 \left\{ \cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_3}{3}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right) \right\} \\
&= \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} + 2\left(\frac{3}{2}m + 1 + 1\right) \\
&= \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} + 3m + 4
\end{aligned}$$

また、 $y_n = y_{3m+3} = 3m + 4$ なので、 $x_n - y_n = \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

(i) (ii) (iii) より $x_n - y_n = \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (答)

それでは、Pythonで分析する。ここでは、漸化式による値を再帰関数を使って求める。

-----kyo to_22_06_NO 1-----

```
import numpy as np
def x(n):
    if n == 1:
        return 0
    else:
        return x(n-1) + n - 1 + 2*np.cos(2*np.pi*x(n-1)/3)
```

```

def y(n):
    if n%3 == 1:
        return n-1
    elif n%3 == 2:
        return n
    elif n%3 == 0:
        return n+1

for n in range(1,21):
    print("n=",n,"のとき: xn-yn の値は",int(x(n))-int(y(n)),end="")
    print(" : n*(n-1)/2 の値は",int(n*(n-1)/2))

```

-----python program-----

[出力]

n = 1 のとき: xn-yn の値は 0 : n*(n-1)/2 の値は 0
n = 2 のとき: xn-yn の値は 1 : n*(n-1)/2 の値は 1
n = 3 のとき: xn-yn の値は 3 : n*(n-1)/2 の値は 3
n = 4 のとき: xn-yn の値は 6 : n*(n-1)/2 の値は 6
n = 5 のとき: xn-yn の値は 10 : n*(n-1)/2 の値は 10
n = 6 のとき: xn-yn の値は 15 : n*(n-1)/2 の値は 15
n = 7 のとき: xn-yn の値は 21 : n*(n-1)/2 の値は 21
n = 8 のとき: xn-yn の値は 28 : n*(n-1)/2 の値は 28
n = 9 のとき: xn-yn の値は 36 : n*(n-1)/2 の値は 36
n = 10 のとき: xn-yn の値は 44 : n*(n-1)/2 の値は 45
n = 11 のとき: xn-yn の値は 54 : n*(n-1)/2 の値は 55
n = 12 のとき: xn-yn の値は 65 : n*(n-1)/2 の値は 66
n = 13 のとき: xn-yn の値は 78 : n*(n-1)/2 の値は 78
n = 14 のとき: xn-yn の値は 91 : n*(n-1)/2 の値は 91
n = 15 のとき: xn-yn の値は 105 : n*(n-1)/2 の値は 105
n = 16 のとき: xn-yn の値は 119 : n*(n-1)/2 の値は 120
n = 17 のとき: xn-yn の値は 135 : n*(n-1)/2 の値は 136
n = 18 のとき: xn-yn の値は 152 : n*(n-1)/2 の値は 153
n = 19 のとき: xn-yn の値は 171 : n*(n-1)/2 の値は 171
n = 20 のとき: xn-yn の値は 190 : n*(n-1)/2 の値は 190

左側が、漸化式を使って求めた $x_n - y_n$ の値で、右側は手計算で求めた式 $\frac{n(n-1)}{2}$ に代入した値である。見事に一致しているように見えるが、それは整数型に変換しているからで、プログラムの中にある $2*np.cos(2*np.pi*x(n-1)/3)$ は理論上は完全な整数になるはずであるが、プログラムでの計算では浮動小数点型となる。その為、左右2つの値は完全には一致しない。仕方ないので、int関数で整数型として、2つの値が一致しているように見せた。

また、この再帰関数は n の値が大きくなると処理速度が等比数列的に遅くなる。漸化式を早く処理したいならば、再起関数を使わずに新たな関数を作った方がよいだろう。以上で[6]の解説は終わる。