２０２０年度　東京大学　数学（理）
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

　東京大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

　難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに６題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、この解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

第　１　問

$a,\ b,\ c,\ p$ を実数とする。不等式

$$ax^2+bx+c>0$$
$$bx^2+cx+a>0$$
$$cx^2+ax+b>0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1) $a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上であることを示せ。

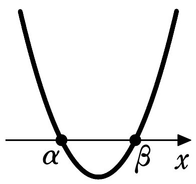
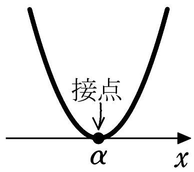
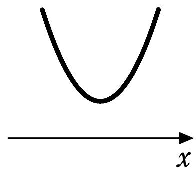
(2) $a,\ b,\ c$ のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3) $p=0$ であることを示せ。

　３つの不等式を見てまず思うことは、2次不等式であり、a、b、c を入れ代えた式が３つ並んでいる、ということである。ここで、$ax^2+bx+c>0$ を満たす実数xとは、２次不等式の解のことであり、頭によぎるのは、数学Ｉの教科書にある2次不等式の解法である。ここで、「数学Ｉ（数研出版）」の教科書を引用する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

2 次不等式の解 $(a>0,\ D=b^2-4ac)$

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2 つの実数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$	重解 $x=\alpha$	実数解はない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解	$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	解はない	解はない
$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	解はない

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅰ（数研出版）」からの引用－－

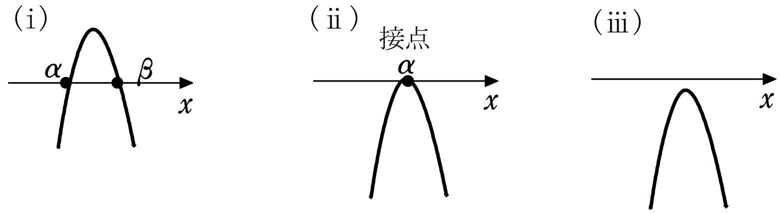
上の表は $a>0$ のときだけであるが、$a<0$ のときは、上の表の $ax^2+bx+c<0$ の解と同じになる。要するに $x>p$ の形になることはありえない。でも、問題文には、３つの不等式を全て満たす実数 x は $x>p$ となる、と書いてある。何が違うんだろうか、とここで悩んでしまう。ここで諦めずに、最後まで問題文を読んでみる。すると、(2) に「a、b、c のうち少なくとも１個は０である。」という文言を見て、はたと気づく。そうか、$ax^2+bx+c>0$ が2次不等式とは書いていない、単に不等式と書いているだけか、ということに。つまり、$a=0$ のときは１次不等式となり、1次不等式 $bx+c>0$ の解は、$b>0$ ならば $x>-\dfrac{c}{b}$ となり、確かに $x>p$ の形に成りえる。後は、これをどのように証明するのか、ということである。この問題は、論理的、数学的に説明する能力を見ているのだろう、と判断して、答案を作成していく。

（１）は上のことに気づけば、それほど難しくないが、成り立つことを減点なく証明しなければならない、というプレッシャーは感じるだろう。このときの受験生へのアドバイスとしては、完璧を目指したら手が縮こまるので、多少の減点はあったとしても、論理的な飛躍や明らかな間違えがなければ大丈夫、と開き直った方がいいと思う。

この手の証明法として、命題の条件（仮定）を式変形して結論を導く方法と命題の対偶を証明する方法、または背理法を使って証明する方法の３つが考えられる。では、この問題は何を使って証明するか。問題文は $p\Longrightarrow q$ という綺麗な命題の形にはなってはいない。

このことから、背理法（結論を否定して矛盾を出す）を用いて証明するように要求している匂いを感じる。

$a<0$ とする。$ax^2+bx+c>0$の解は、$y=ax^2+bx+c$ かつ$y>0$ となるx の範囲なのである。$y=ax^2+bx+c$ とx 軸との関係は下図の３通りしかなく、$y>0$ となるx の範囲は下の３通りしかない。

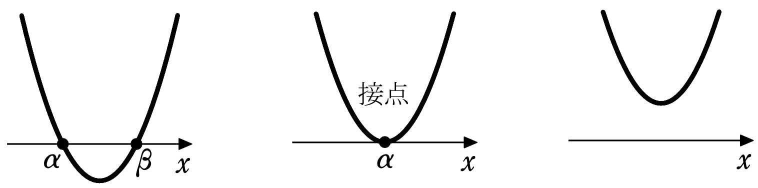


$\alpha<x<\beta$　　解はない　　解はない

このことから、少なくとも一つの不等式が上の３通りの1つにしかならないので、３つの不等式を全て満たす実数x が $x>p$ になることはない。 $b<0$、 $c<0$ のときも同様に示せるので、 以上より、「a、b、c の少なくとも１つが０より小さい」とすると「 ３つの不等式をすべて満たす実数x は$x>p$ になる」ことに矛盾する。
よって、a、b、c は全て０以上である。

（２）も（１）と同様にして、背理法で証明してみよう。

a、b、c 全てが０でない実数とする。すると３つの不等式は2次不等式になる。
さらに、（１）からa、b、c は正の実数になる。これより、（１）と同様にして、
１つ目の不等式を$y=ax^2+bx+c$ かつ$y>0$ とし、これを満たす実数x を下図を用いて考えると、$x<\alpha$，$\beta<x$ または α 以外のすべての実数 または すべての実数 となる。



$x<\alpha$，$\beta<x$　　α 以外のすべての実数　　すべての実数

このことから、a、b、c 全てが０でない実数とすると、３つの不等式を同時に満たす実数x が$x>p$ になることに矛盾する。
よって、a、b、c の少なくとも1個は０である。

（３）（１）と（２）から（ｉ）$a=0$、$b>0$、$c>0$ と（ⅱ）$a=0$、$b=0$、$c>0$と（ⅲ）$a=0$、$b=0$、$c=0$ の３つの場合のときに、$x>0$ となることを示せば、$x>p$となるp は $p=0$ となることが証明される。これは、a、b、c を入れ換えることによって、全て同じ証明になるので、上の(ｉ)、(ⅱ)、(ⅲ)を示すだけでよい。

（ｉ）$a=0$、$b>0$、$c>0$のとき、

$$\begin{cases} bx+c>0 & \cdots\cdots① \\ bx^2+cx>0 & \cdots\cdots② \\ cx^2+b>0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①より　$x>-\dfrac{c}{b}$……①′

②より　$x(bx+c)>0$

$x<-\dfrac{c}{b}$、$0<x$ ……②′

③より　x はすべての実数……③′

①′、②′、③′より　$x>0$

（ⅱ）$a=0$、$b=0$、$c>0$のとき、

$$\begin{cases} c>0 & \cdots\cdots① \\ cx>0 & \cdots\cdots② \\ cx^2>0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①より　x はすべての実数　……①′

②より　$x>0$　……②′

③より　x はすべての実数　……③′

①′、②′、③′より　$x>0$

（ⅲ）$a=0$、$b=0$、$c=0$のとき、

$0>0$ となり、x の解はない

（ｉ）（ⅱ）（ⅲ）より、$x>0$ すなわち $p=0$となる。

以上が第１問の解説であるが、この問題の趣旨は、数学的な表現力を試しているような問題である。マークシート方式のセンター試験の批判として、マークシートだと表現力をみることが出来なく、問題を解ければよい、という風潮になるのでは、と昔から言われているが、それをカバーするのが2次試験（個別試験）である、ということを示しているような問題である。

この問題を一生懸命考えた先生には失礼な言い方だと思うが、数学的な面白さからはほど遠い問題で、これが出来たからって、どうってことがないような問題のような気がする。敢えて言うならば、ボーっと教科書を読んでいては駄目だよ、とEXCELLNETな生徒に説明するときに使える問題である。つまり、東大でこんな問題も出されているよ、と１年生のときに言えるメリットがある。数学では、いかに答案を書くか、というのが昔から言っていた内容である。その為には、論理的に物事を考え表現する、というのが基本として指導してきたが、文系では2次試験に数学がないところが多いので、いかに問題を解くか、に集中していたのは事実である。しかし、問題を解く能力と論理的な思考力とは相反するものではない。答えを導きだせるEXCELLENTな生徒は、自然と論理的な思考力も身についている。つまり、思考力なくして難関大学の数学は解けない、ということである。

第　2　問

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle$PQR で表す。また，P, Q, R が同一直線上にあるときは，$\triangle \mathrm{PQR}=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，$\triangle \mathrm{ABC}=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle \mathrm{ABX}+\triangle \mathrm{BCX}+\triangle \mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。

この問題は、どの分野の問題なのか、を考えるのに時間がかかるのでは、と思う。ベクトルで解くのか、媒介変数を使った軌跡の問題として解くのか、かなり迷ってしまう。ベクトルで解くのでは、と考えた人は、「数学B」の教科書のベクトル方程式の次の記述を思い浮かべた人だろう。

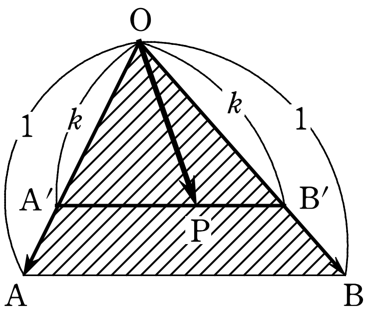
−−

$\triangle$OAB に対して，点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ 0 \leqq s+t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めてみよう。

$s+t=k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ とおく。



[1]　$0<k \leqq 1$ のとき　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで，$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\ s'+t'=1,\ s' \geqq 0,\ t' \geqq 0$$

よって，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，定数 k に対して，点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

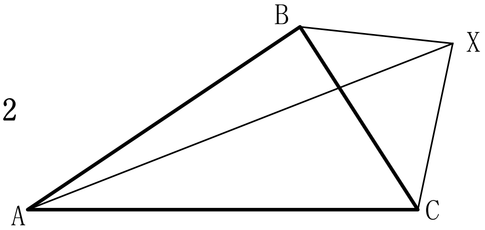
k の値が $0<k \leqq 1$ の範囲で変化すると，線分 A′B′ 上の点は，点 O を除く $\triangle$OAB の周およびその内部を動く。

[2]　$k=0$ のとき，$s=0$，$t=0$ であるから，点 P は点 O に一致する。

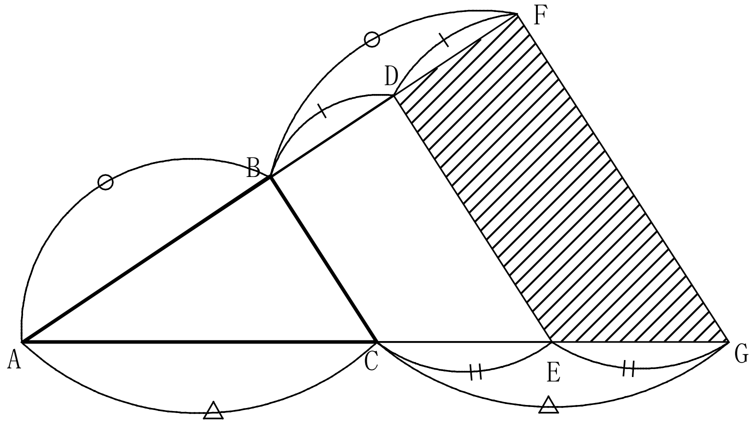
したがって，点 P の存在範囲は，<u>$\triangle$OAB の周および内部</u>である。

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−「数学B（数研出版）」からの引用−−

しかし、このようなベクトル方程式ではなく、図形の問題として、まずは解いてみよう、考えてみる。

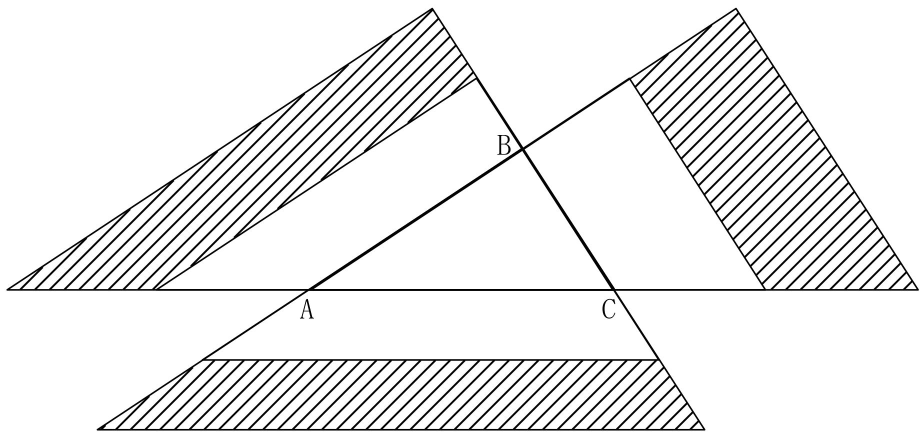


$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX$ が $\triangle ABC+\triangle BCX\times 2$ となることが分かる。そこから、$\triangle BCX$ が $\triangle ABC$ の半分ならば面積の和は２となり、$\triangle ABC$ と等しいならば、面積の和が３になるんだ、と気付く。すると、まずは下のような斜線部分の範囲が面積の和が２以上３以下である、と見つける。



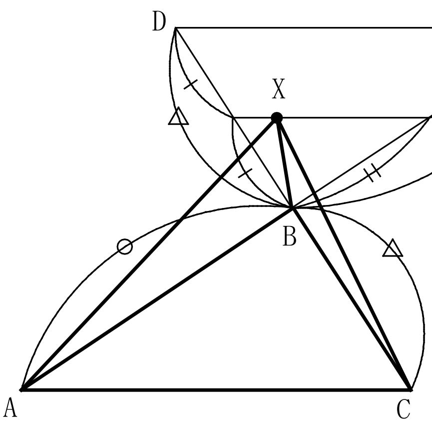
この斜線部分の面積は、$\triangle ABC=1$ なので、$\triangle AFG=4$、$\triangle ADE=\dfrac{9}{4}$ となり、

(斜線部分の面積)$=4-\dfrac{9}{4}=\dfrac{7}{4}$ となる。



上記の斜線部分の面積は、$\dfrac{7}{4}\times 3=\dfrac{21}{4}$

次は、上の斜線部分の隙間の部分がどうなるのだろうか、を考えてみる。斜線から左右にはみ出したら面積が２より小さくなったり、３より大きくなったりするのはありえないな、ということで次のような図を考える。



図より$\triangle CAX=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle ABC$……①

また、$\triangle CAX$と$\triangle ABC$の高さの比が 2:1 になるので、$\triangle CAX=\dfrac{3}{2}\times\triangle ABC$……②

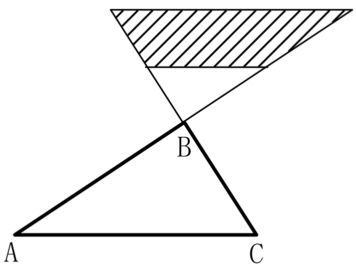
①、②より、$\triangle ABX+\triangle BCX=\dfrac{1}{2}\times\triangle ABC$

よって、$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=\dfrac{3}{2}\times\triangle ABC+\dfrac{1}{2}\times\triangle ABC=2\times\triangle ABC=2$

同様にして、点Xが上図の辺DE上にある場合は、

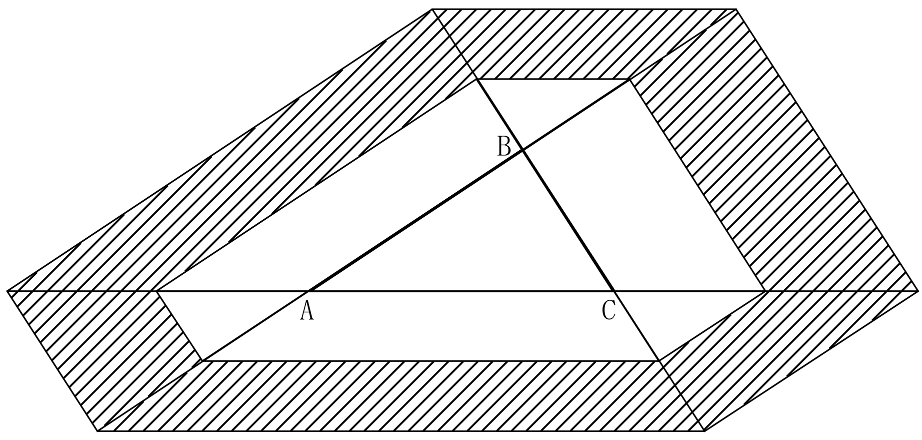
$$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=2\times\triangle ABC+1\times\triangle ABC=3\times\triangle ABC=3$$

以上より、先の斜線部分以外で
$2\leqq\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\leqq 3$ となる点Xの存在範囲
は右図の斜線部分となる。



この面積は$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ となる。

以上より、$2\leqq\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX\leqq 3$となる点$X$の存在範囲は下図の斜線部分となり、その面積は$\dfrac{21}{4}+\dfrac{3}{4}\times 3=\dfrac{15}{2}$



この解法は途中の証明をかなり端折っている。底辺の長さが同じ三角形の面積比は高さの比になる、というだけであるが、果たして細かな証明が必要かどうかは分からない。

第　３　問

$-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$
$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える。

(1) $-1 < t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。

(2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ。

　この問題を読んで最初に思うことは、数学Ⅲの分野で、そのまま解いていけば答えが出そうな気になるが、このタイプとしては、最後の（３）が解けるかどうかが、他の受験生との差を付けれるかどうか、なのではないか、というのが経験上感じられる。とにかく、まずは普通通り（１）と（２）を解いてみる。

（１）　$g(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$ とおくと

$$g(t) = \frac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}} = \frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$$

$$g'(t) = \frac{\dfrac{-3\sqrt{1+t}}{2\sqrt{1-t}} - 3\sqrt{1-t}\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1+t}$$

$$= \frac{-3(1+t)-3(1-t)}{2(1+t)\sqrt{1-t^2}} = \frac{-6}{2(1+t)\sqrt{1-t^2}} < 0 \qquad [\because -1 < t \leqq 1]$$

よって、$-1 < t \leqq 1$における関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少する。

（２）　$f(t) = \sqrt{\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2}$

$$= \sqrt{(1+t)^2(1+t) + 9(1+t)^2(1-t)}$$
$$= (1+t)\sqrt{(1+t) + 9(1-t)}$$
$$= (1+t)\sqrt{2(5-4t)}$$

$$f'(t)=\sqrt{2(5-4t)}+(1+t)\frac{-8}{2\sqrt{2(5-4t)}}$$
$$=\frac{2(5-4t)-4(1+t)}{\sqrt{2(5-4t)}}$$
$$=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{2(5-4t)}}$$

これより、$f(t)$ の増減表は下記の通りになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	極大	↘	$2\sqrt{2}$

$t=\frac{1}{2}$ のとき、極大値 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

すなわち、$-1\leqq t<\frac{1}{2}$ のとき、$f(t)$ は増加　　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき、$f(t)$ は減少

この増減表から、$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最大値は、$t=\frac{1}{2}$ のとき、最大値 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

※ この「増減を調べよ」という問題が入試問題にたまにあるが、生徒からの質問として、増減表を示すだけでは駄目ですか、とよくされる。EXCELLENTな生徒ほど、増減表と書き出した答えは同じじゃないかな、ということからなのだろう。私は、多分、いいんじゃないかね、と答えるが、大学側の採点基準として、本当にどうなっているかは分からない。予想として……大学によって違うんじゃないかな、EXCELLENTな高校生が多く受験する大学はOKで、そうじゃないところは減点されるのかな……と思ったりしているが、実際のところどうなのか定かではない。

（３）

（１）と（２）は、特に迷うべき箇所もなくすんなりと解答が導き出された。その後の（３）なので、かなりの難問なのでは、と予想するが、まずは問題文どおり図を描いてみる。まず迷うのは、（２）での $f(t)$ のグラフではないな、ということである。$f(t)$ は点Pと原点との距離なので、$t=\frac{1}{2}$ のとき原点との距離が最大になっている、ということである。それでは、まず概形図を描くために、具体的な点を求めて結んでみる。

$t=-1$ のとき、$x(-1)=0$、$y(-1)=0$ から点 $(0, 0)$ がスタートであり、途中の点として、

$t=0$ のとき、$x(0)=1$、$y(0)=3$ から点 $(1, 3)$ と

$t=\frac{1}{2}$ のとき、$x\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{4}$、$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{4}$ から点 $\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}, \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$ となり、

$t=1$ のとき、$x(1)=2\sqrt{2}$、$y(1)=0$ から点 $(2\sqrt{2}, 0)$ が最後の点となる。

それらの点を取って概形図を考えると、原点を通り上に凸の2次関数と似たような図形になる。もしこの問題が難関大学でなければ、単に x 軸と囲まれた部分の面積を求めさせて

終わりと思うが、さすが東大、それじゃ駄目で、それを時計回りに90° 回転させ、通過した面積をもとめさせようとする。まずPの軌跡Cを図示するが、せっかくなのでPythonを使って表示すると図１になった。これを時計回りに90° 回転させた図を考えなければならないが、そのときに（2）で求めた原点から一番遠い点が$t=\dfrac{1}{2}$のときであり、その長さが$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$であることを考慮しながら描いてみる。

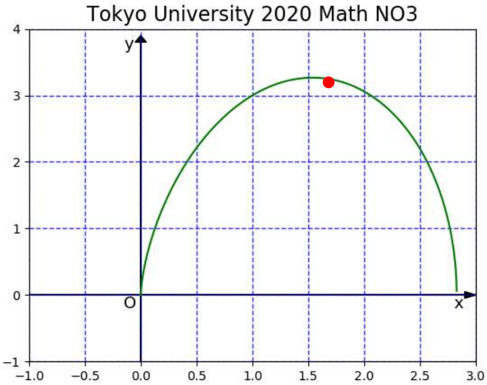


図１

すると、図２のようになる。ここで、この通過した領域の面積は、先の図のx軸で囲まれた面積と半径$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$の四分円の面積を合計した面積である、と気付くかどうかが完答できるかどうかの分かれ目であろう。まず、図１のx軸で囲まれた面積をS_1として求めてみる。

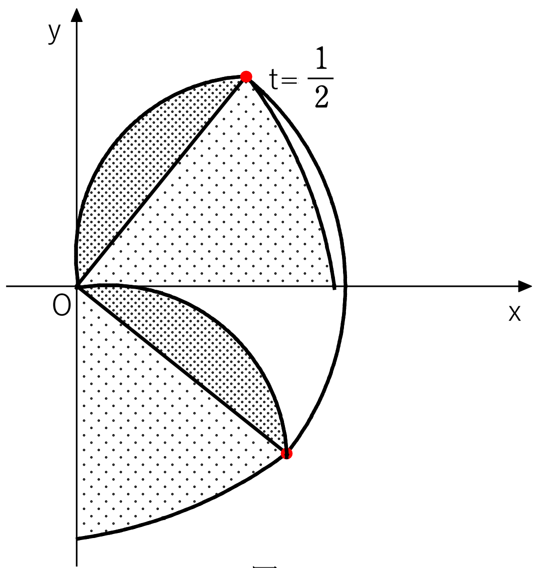


図２

$S_1=\int_0^{2\sqrt{2}} y(t)dx$

x	$0 \longrightarrow 2\sqrt{2}$
t	$-1 \longrightarrow \ \ 1$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{1+t}+\frac{1+t}{2\sqrt{1+t}}$$
$$=\frac{2(1+t)+1+t}{2\sqrt{1+t}}$$
$$=\frac{3(1+t)}{2\sqrt{1+t}}=\frac{3}{2}\sqrt{1+t}$$

これより$S_1=\int_0^{2\sqrt{2}} y(t)dx=\int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\,\dfrac{dx}{dt}dx=\int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\,\dfrac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{9}{2}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{1-t^2}+t\sqrt{1-t^2}\right\}dt$$

ここで、$\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt$を$1-t^2=u$とおいて求めようかな、と思ってメモ用紙にざっと計算したら０となった。そこで、$y=t\sqrt{1-t^2}$は奇関数であり、$\int_{-a}^{a}(\text{奇関数})dx=0$、$\int_{-a}^{a}(\text{偶関数})dx=2\int_{0}^{a}(\text{偶関数})dx$という公式が使えるということに気付いた。ECELLENTな高校生ならばすぐに気付くのだろうが……、歳のせいということで……、ここで若者ならば（汗）という言葉が入るのだろうが……、話しを元に戻すことにする。

$S_1 = 9\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ となり、$t=\sin\theta$ とおくと、

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{dt}{d\theta} = \cos\theta$$

この積分を$y=\sqrt{1-x^2}$が半円 になるので、円の面積を使って求める方法もあるが……私はこっちの置換積分が好きである。

$$S_1 = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= 9\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 9\times\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

これに半径$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$の四分円の面積 $\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{27}{8}\pi$ を加えると、

$\dfrac{9}{4}\pi+\dfrac{27}{8}\pi=\dfrac{45}{8}\pi$（答）　※ここで図１のPythonのプログラムを以下に示す。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title("Tokyo University 2020 Math NO3", fontsize = 16)
ax.set_xlim(-1,3)
ax.set_ylim(-1,4)
ax.arrow(0,-2,0,5.8,head_width=0.1,head_length=0.1,fc='k',ec='k')
ax.arrow(-2,0,4.9,0,head_width=0.1,head_length=0.1,fc='k',ec='k')
ax.text(-0.15,3.7,'y',fontsize=13)
ax.text(2.8,-0.2,'x',fontsize=13)
ax.text(-0.15,-0.2,'O',fontsize=13)
ax.grid(which="major",axis="x",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",l
inewidth=1)
ax.grid(which="major",axis="y",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",l
inewidth=1)
t = np.arange(-1, 1, 0.0001)
x = (1+t)*np.sqrt(1+t)
y = 3*(1+t)*np.sqrt(1-t)
ax.plot(x, y, color = "green")
t = 1/2
x = (1+t)*np.sqrt(1+t)
y = 3*(1+t)*np.sqrt(1-t)
ax.plot(x, y, marker='.',markersize=10,color = "red")
plt.show()
```

第　4　問

n, k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

（１）まずは問題文を読んで、次のようなものを考えた。

$$\begin{aligned}
&2^0\cdot 2^0 + 2^0\cdot 2^1 + 2^0\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 2^0\cdot 2^{n-1}\\
&+2^1\cdot 2^0 + 2^1\cdot 2^1 + 2^1\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 2^1\cdot 2^{n-1}\\
&+2^2\cdot 2^0 + 2^2\cdot 2^1 + 2^2\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 2^2\cdot 2^{n-1}\\
&\qquad\vdots\\
&+2^{n-1}\cdot 2^0 + 2^{n-1}\cdot 2^1 + 2^{n-1}\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 2^{n-1}\cdot 2^{n-1}
\end{aligned}$$

しかし、具体的に$n=4$ のときは次のようになる。

$$\begin{aligned}
&2^0\cdot 2^0 + 2^0\cdot 2^1 + 2^0\cdot 2^2 + 2^0\cdot 2^3\\
&+2^1\cdot 2^0 + 2^1\cdot 2^1 + 2^1\cdot 2^2 + 2^1\cdot 2^3\\
&+2^2\cdot 2^0 + 2^2\cdot 2^1 + 2^2\cdot 2^2 + 2^2\cdot 2^3\\
&+2^3\cdot 2^0 + 2^3\cdot 2^1 + 2^3\cdot 2^2 + 2^3\cdot 2^3
\end{aligned}$$

これを見ると、$2^0\cdot 2^0$、$2^1\cdot 2^1$、$2^2\cdot 2^2$、$2^3\cdot 2^3$ は条件に適さず、さらに、$2^0\cdot 2^1$と$2^1\cdot 2^0$などは同じものである。つまり、$2^k\cdot 2^k$ のタイプを消し、さらに、その和の半分が求める答えになるだろう。このようなことを考えて、以下のような答案になった。

$$a_{n,2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^{i-1}\cdot 2^{j-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot 2^{k-1}\right)\times\frac{1}{2} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{2k-2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\frac{2^n-1}{2-1}-\sum_{k=1}^{n}4^{k-1}\right)\times\frac{1}{2}=\left(\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}(2^n-1)-\frac{4^n-1}{4-1}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\left(2^n\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}-\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}-\frac{4^n-1}{4-1}\right)\times\frac{1}{2}=\left(2^n\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{4^n-1}{4-1}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\left(2^{2n}-2^n-2^n+1-\frac{4^n-1}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\left(2^{2n}-2^n-2^n+1-\frac{2^{2n}-1}{3}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\cdot2^{2n}-6\cdot2^n+3-2^{2n}+1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\cdot2^{2n}-6\cdot2^n+4}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2^{2n}-3\cdot2^n+2}{3}$$

（２）$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n$ より

$f_{n+1}(x)=1+a_{n+1,1}x+a_{n+1,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n+1,n}x^n+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$ となる。

この式をじっと見て、問題を解く手掛かりは、$a_{n,k}$と$a_{n+1,k}$との関係かな、と予想する。まず、$a_{n,1}$と$a_{n+1,1}$の関係を考えると、

$$a_{n+1,1}=2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}+2^n=a_{n,1}+2^n$$

次に、$a_{n,2}$と$a_{n+1,2}$の関係を考える。このとき（１）を使うのでは、と寄り道をしてしまい、結局、上と同じように考えればよい、と気付くのに多少時間を費やした。

$$a_{n+1,2}=a_{n,2}+2^n(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})=a_{n,2}+2^na_{n,1}$$

同様にして、$a_{n+1,3}=a_{n,3}+2^na_{n,2}$、$a_{n+1,4}=a_{n,4}+2^na_{n,3}$、……、$a_{n+1,n}=a_{n,n}+2^na_{n,n-1}$

最後に$a_{n+1,n+1}$を考えるが、$a_{n,n+1}$は定義からあり得ないな、と気付き、もともとの定義から、$a_{n+1,n+1}=2^0\cdot2^1\cdot2^2\cdot\cdots\cdots\cdot2^n=2^na_{n,n}$と至ってシンプルになることを導く。

これらの関係を$f_{n+1}(x)$に代入すると、

$$f_{n+1}(x)=1+(a_{n,1}+2^n)x+(a_{n,2}+2^na_{n,1})x^2+\cdots\cdots+(a_{n,,n}+2^na_{n,n-1})x^n+2^na_{n,n}x^{n+1}$$

$$=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n+2^nx(1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n)$$

$$=f_n(x)+2^nxf_n(x)$$

$$=f_n(x)(1+2^nx)$$

よって、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$

次に、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$を考えるが、上の関係を使う、と気付くのに時間が掛かると思う。

これが、（２）で$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$を求めさせ、（３）で$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$を求めよならば、入試の定番として（２）$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$の関係を使うのだろう、と考えるが、このように並列に並んでいると、同じことをして求められるのでは、と考えてしまい、時間が無駄に経ってしまう。そこを乗り越え、次のような解法を思い付いた。

$$\frac{f_{n+1}(x)}{\cancel{f_n(x)}}\cdot\frac{\cancel{f_n(x)}}{\cancel{f_{n-1}(x)}}\cdot\frac{\cancel{f_{n-1}(x)}}{\cancel{f_{n-2}(x)}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\cancel{f_2(x)}}{f_1(x)}=(1+2^nx)(1+2^{n-1}x)(1+2^{n-2}x)\cdots(1+2x)$$

ここで $f_1(x)=1+a_{1,1}x=1+x$ なので

$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)(1+2^{n-1}x)(1+2^{n-2}x)\cdots(1+2x)(1+x)$

これより $f_n(x)=(1+2^{n-1}x)(1+2^{n-2}x)(1+2^{n-3}x)\cdots(1+2x)(1+x)$ より

$$\begin{aligned}f_n(2x)&=(1+2^{n-1}\cdot 2x)(1+2^{n-2}\cdot 2x)(1+2^{n-3}\cdot 2x)\cdots(1+2\cdot 2x)(1+2x)\\&=(1+2^nx)(1+2^{n-1}x)(1+2^{n-2}x)\cdots(1+2^2x)(1+2x)\end{aligned}$$

以上より $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\dfrac{(1+2^nx)(1+2^{n-1}x)(1+2^{n-2}x)\cdots(1+2x)(1+x)}{(1+2^nx)(1+2^{n-1}x)(1+2^{n-2}x)\cdots(1+2^2x)(1+2x)}=1+x$

（３）これは（２）の答えを使うのだろう、と予測して解法を考えるのが常道であろう。

まず、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$ から、$f_{n+1}(x)=f_n(x)(1+2^nx)$ となり、この式から、$a_{n+1,k+1}$ と $a_{n,k}$ との関係をどのように求めるのか考える。この式は、x についての恒等式、ということに気付けば、係数比較をするのだろう、という発想にたどり着くと思う。

$a_{n+1,k+1}$ は $f_{n+1}(x)$ の x^{k+1} の係数で、$a_{n,k}$ は $f_n(x)$ の x^k の係数である、ということに着目して、左右の x^{k+1} における係数を比較をすると、$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+a_{n,k}\cdot 2^n$……①

次に、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$ から、$f_{n+1}(x)=f_n(2x)(1+x)$ となり、上と同様にして

$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k}$……②となる。この2式から、$a_{n,k+1}$ を削除すると、

①から $a_{n,k+1}=a_{n+1,k+1}-2^na_{n,k}$ となり、これを②に代入すると

$$\begin{aligned}&a_{n+1,k+1}=2^{k+1}(a_{n+1,k+1}-2^na_{n,k})+2^ka_{n,k}\\&(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=2^n\cdot 2^{k+1}a_{n,k}-2^ka_{n,k}\\&(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=2^ka_{n,k}(2^{n+1}-1)\end{aligned}$$

よって、$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$

※第４問は、初めて問題を読んだときは、${}_nC_k$ 個などの表記があり、この問題を解くためには二項定理か何かを使わせるような匂いを漂わせているが、実際の解法では、二項定理は一切使わない。それでは、この問題は何を求めようとしているのか、を考えなければ解くこともできない。それで、具体的な数値を使って問題の全体のイメージを掴もうとするかどうかがこの問題を解くコツである。これをすることによって、この問題は何を求めようとしているのかが分かり、とにかく答えが出せるかどうかを解いている問題だと理解する。答えが出せたら、途中の解法に多少の説明不足があったとしても、かなりの高得点が得られると思う。先にも述べたが、具体的な採点基準は分からないので、どのように減点されるのかも定かではない。しかし、私がもし採点する立場なら、答えが出てなんぼ、の問題で、単純ミスで答えが違っていた場合だけ部分点での得点があるのかな、と思う。

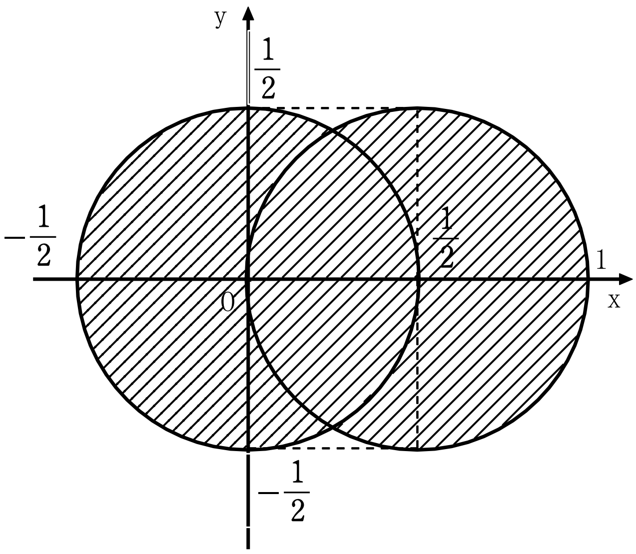
第　５　問

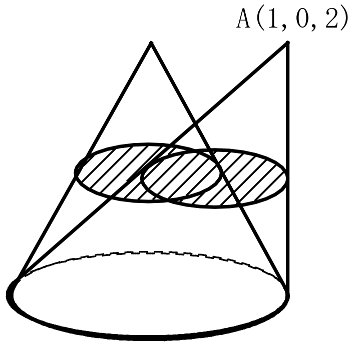
座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 (0, 0, 2) を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 A(1, 0, 2) を考える。

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

（１）これは何を訊きたい問題なのか、皆目見当も付かない。
まず、問題を読みながら図を描いてみるが





上図の斜線部分になるのはすぐに分かるが、それを証明させたい問題なのだろう。では、斜円柱の切り口が円になることを示せばよいのだろうか。それならば、縦に切った切り口の三角形を使って、円になることはある程度の証明はできるが、本当にそれでいいのだろうか。もっと高級なものを使って証明しなければならないのではないか、と悩んでしまう。悩んでいるうちに時間が経ってしまうので、ここではカッコよくベクトル方程式を使ってみる。

点PがSの底面上を動くので、$P(s, t, 0)$、$s^2+t^2 \leqq 1$ とおける。さらに、$A(1, 0, 2)$、
線分AP 上で$z=1$ となる点を$Q(x, y, 1)$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$、$0 \leqq k \leqq 1$

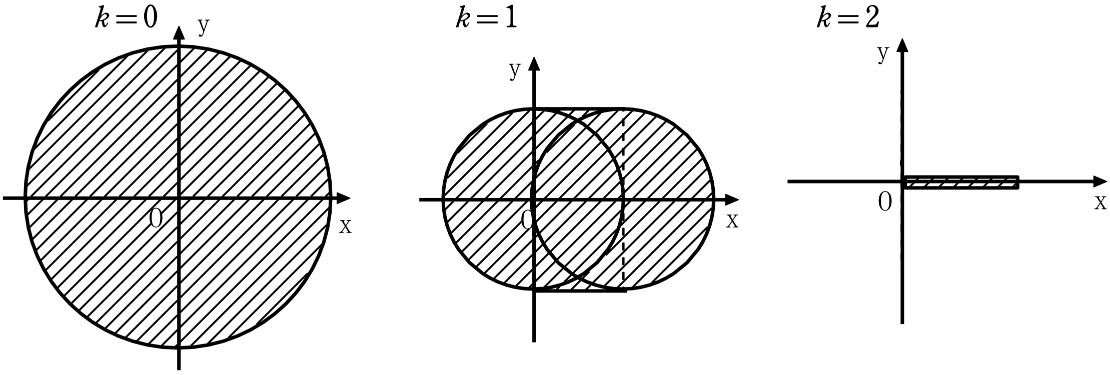
$$(x-1, y, -1)=k(s-1, t, -2) \text{より} \begin{cases} x-1=k(s-1) & \cdots\cdots ① \\ y=kt & \cdots\cdots ② \\ -1=-2k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③を①と②に代入すると、$s=2x$、$t=2y$　これより平面$z=1$ におけるTの切り口の方

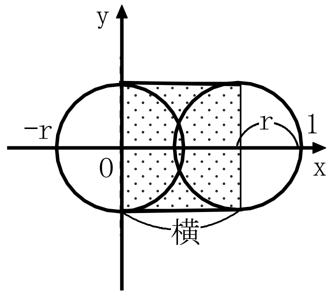
程式は $4x^2+4y^2 \leqq 1$ すなわち $x^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}$ これは中心原点、半径$\frac{1}{2}$ の円を表す。

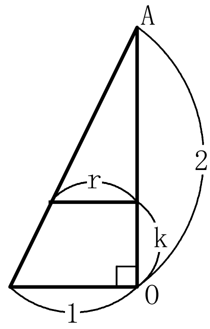
これを示した後に、円錐Sの切り口も円になることの証明もいるのだろうか。さすがに、それはいらないと判断した。

（2）（1）から判断すると、$z=k$ における切り口の面積関数をk で表し、それを0から2まで積分して求めるのだろう、と予想する。それでは、$z=k$ における切り口の面積はどうなるか、を集中して考えてみる。



これから　$z=k$ のとき





上の右図から、切り口の半径r は$(2-k):r=2:1$ なので、$r=\frac{2-k}{2}$

また、左図より長方形の横の長さは$1-r=1-\frac{2-k}{2}=\frac{k}{2}$

これより、切り口の面積関数$S(k)=\left(\frac{2-k}{2}\right)^2\pi+\frac{k}{2}\cdot(2-k)=\frac{\pi}{4}(k^2-4k+4)+k-\frac{k^2}{2}$

よって、求める体積は

$$V=\int_0^2\left\{\frac{\pi}{4}(k^2-4k+4)+k-\frac{k^2}{2}\right\}dk=\frac{\pi}{4}\left[\frac{k^3}{3}-2k^2+4k\right]_0^2+\left[\frac{k^2}{2}-\frac{k^3}{6}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{8}{3}-8+8\right)+\left(\frac{4}{2}-\frac{8}{6}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}$$

※第５問は、数学Ⅲ、どっぷりど真ん中、直球勝負の問題であった。

第　６　問

以下の問いに答えよ。

(1) A, α を実数とする。θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0$$

を考える。$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

(2) 座標平面上の楕円

$$C: \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

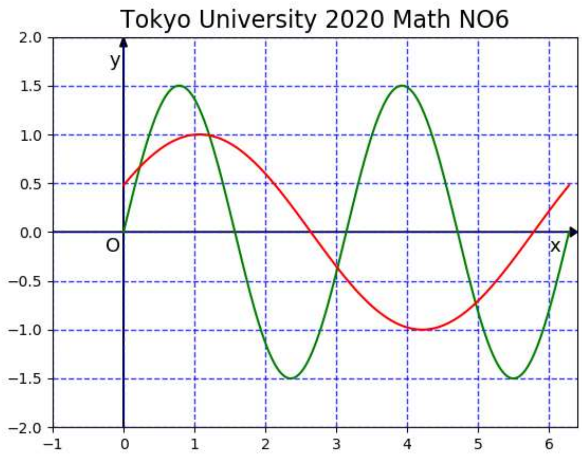
を考える。また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 $r\,(0 < r < 1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

（１）まず最初にやってみることは、$y = A\sin 2\theta$ と $y = \sin(\theta+\alpha)$ のグラフを描いてみることだろう。ここでは、Python を使って、$A=1.5$、$\alpha=0.5$ としてグラフを描いたのが右図である。これは手書きでも十分描ける図と思うので、これから交点は少なくとも４個はあると考えられる。



それでは、それをどのように証明しようか、と考えるが、$f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$ として、$f(\alpha) > 0$、$f(\beta) < 0$ ならば、α と β の間に少なくとも１個の実数解を持つ、ということを利用しようと思うが、どのような値を代入してよいかが問題となる。このとき、$f(0) = f(2\pi) = -\sin\alpha$ であることに着目し、その場合分けを考える。

(ⅰ) $\sin\alpha > 0$ のとき

$$f(0) = -\sin\alpha < 0、f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) > 0 \left[\because A > 1 , \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) < 1\right]$$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)<0$、$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)>0$

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)<0$ から、$0<\theta<\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$、$\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$、

$\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$ のそれぞれの間に少なくとも１個の解が存在するので、$0\leqq\theta<2\pi$ の間に少なくとも４個の解が存在する。

(ⅱ) $\sin\alpha<0$ のとき

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0$、$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)<0$、

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)>0$、$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-A-\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)<0$

さらに $f(2\pi)=-\sin\alpha>0$ から、$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$、$\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$、$\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4}<\theta<2\pi$ のそれぞれの間に少なくとも１個の解が存在するので、$0\leqq\theta<2\pi$ の間に少なくとも４個の解が存在する。

以上より、方程式は $0\leqq\theta<2\pi$ の間に少なくとも４個の解が存在する。

（２）この問題は、問題文を読み解くことが難しい。わざと読み取れないように書いている、としか思えない。最初、楕円上の点と楕円内部の点を結ぶ直線は無限に存在するのだから、接線に垂直な直線も４本なんてものじゃなく、無数に存在するんじゃないかな、と思ってしまう。でも、よくよく読んでみると、D内にある任意の点Pと楕円C上にある点Qを結んで作られる直線PQと点Qにおける接線が垂直になるのは、確かに限られるだろう、と気付く。そのような点Qが、少なくとも４個存在する、という意味なんだ、と理解するまでに時間が掛かってしまった。

では、どのように証明しようか、と悩んでしまうが、これも（１）を使うんだ、ということで、楕円上の点を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の媒介変数を使って表すことを考える。

まず、$2x^2+y^2<r^2$ を表す領域D内の点 $P\left(\frac{r'}{\sqrt{2}}\cos\alpha\ ,\ r'\sin\alpha\right)$、但し $r'<r$ とおく。

さらに、楕円C上の点 $Q(\sqrt{2}\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ とおくと、$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$ なので、点 Q における接線の傾きは $-\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2\sin\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta}$ となる。

次に、直線 PQ の傾きは $\frac{\sin\theta-r'\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\theta-\frac{r'}{\sqrt{2}}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}(\sin\theta-r'\sin\alpha)}{2\cos\theta-r'\cos\alpha}$ なので、

これらが垂直になるには、$-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sin\theta-r'\sin\alpha)}{2\cos\theta-r'\cos\alpha}=-1$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{(\sin\theta-r'\sin\alpha)}{2\cos\theta-r'\cos\alpha}=1$$

$$\sin\theta\cos\theta-r'\sin\alpha\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta\cos\alpha$$

$$\sin\theta\cos\theta - r'(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta - r'\sin(\theta-\alpha) = 0$$

$$\frac{1}{2r'}\sin 2\theta - \sin(\theta-\alpha) = 0 \cdots\cdots ①$$

ここで $\frac{1}{2r'} = A$、$-\alpha = \alpha'$ とおくと、$A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha') = 0$ となり、任意のα' に対して点Q が少なくとも４個存在するには、①を満たすθ が$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも４個の解を持てばよいので、（１）より$A > 1$ とならなければならない。

ここで $0 < r' < r < 1$ なので、$A = \frac{1}{2r'} > \frac{1}{2r} > \frac{1}{2}$ となり、$A > 1$ となるr は存在する。

その最大値は$\frac{1}{2r} = 1$ となるときなので、$r = \frac{1}{2}$ となる。

※ここで使用したグラフのプログラム（Python）を以下に示す。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title(”Tokyo University 2020 Math NO6”, fontsize = 16)
ax.set_xlim(−1,6.4)
ax.set_ylim(−2,2)
ax.arrow(0,−2,0,3.9,head_width=0.1,head_length=0.1,fc=’k’,ec=’k’)
ax.arrow(−2,0,8.3,0,head_width=0.1,head_length=0.1,fc=’k’,ec=’k’)
ax.text(−0.2,1.7,’y’,fontsize=13)
ax.text(6,−0.2,’x’,fontsize=13)
ax.text(−0.25,−0.2,’O’,fontsize=13)
ax.grid(which=”major”,axis=”x”,color=”blue”,alpha=0.8,linestyle=”−−”,
linewidth=1)
ax.grid(which=”major”,axis=”y”,color=”blue”,alpha=0.8,linestyle=”−−”,
linewidth=1)
A=1.5
α=0.5
θ = np.arange(0, 2*np.pi, 0.0001)
y1 = A*np.sin(2*θ)
y2 = np.sin(θ+α)
ax.plot(θ, y1, color = ”green”)
ax.plot(θ, y2, color = ”red”)
plt.show()
```