２０２０年度　東北大学　　数学(理)
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

東北大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

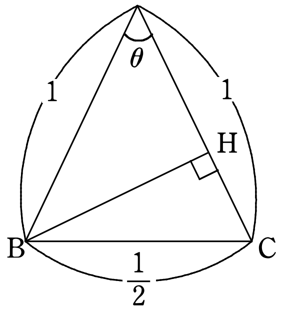
難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに６題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

$\boxed{1}$　$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta,\ \sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

(1)の解法



△ABCにおいて、余弦定理より　$\cos\theta=\dfrac{1+1-\frac{1}{4}}{2\cdot1\cdot1}$

$=\dfrac{7}{8}$

また、$0°<\theta<180°$ なので $\sin\theta>0$

これより、$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{15}{64}}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

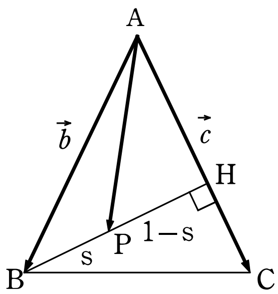
(2)の解法

$$AP^2+BP^2+CP^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$
$$=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

ここで、

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおくと、$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=1\cdot1\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{8}$となる。

さらに、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ なので、



$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0、$$
$$t^2|\vec{c}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$
$$t^2-\frac{7}{8}t=0$$

$t\fallingdotseq0$ より $t=\dfrac{7}{8}$

すなわち、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{7}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{7}{8}\vec{c}$となり、

図より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+\dfrac{7}{8}s\vec{c}$ となる。

これらより、$AP^2+BP^2+CP^2$

$$=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$
$$=3\left|(1-s)\vec{b}+\frac{7}{8}s\vec{c}\right|^2-2\left\{(1-s)\vec{b}+\frac{7}{8}s\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-2\left\{(1-s)\vec{b}+\frac{7}{8}s\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$$
$$=3\left\{(1-s)^2|\vec{b}|^2+\frac{7}{4}(1-s)s\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{49}{64}s^2|\vec{c}|^2\right\}-2(1-s)|\vec{b}|^2-\frac{7}{4}s\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-2(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$-\frac{7}{4}s|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$=3\left\{(1-s)^2+\frac{49}{32}(1-s)s+\frac{49}{64}s^2\right\}-2(1-s)-\frac{49}{32}s+1-\frac{7}{4}(1-s)-\frac{7}{4}s+1$$
$$=3\left\{(1-s)^2+\frac{49}{32}(1-s)s+\frac{49}{64}s^2\right\}-2(1-s)-\frac{49}{32}s+1-\frac{7}{4}(1-s)-\frac{7}{4}s+1$$
$$=\frac{45}{64}s^2-\frac{15}{16}s+\frac{5}{4}=\frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{15}{16}$$

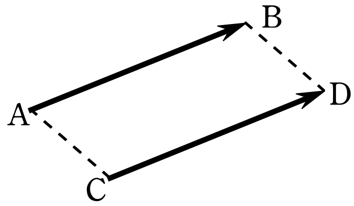
よって、$s=\dfrac{2}{3}$ のとき、最小値 $\dfrac{15}{16}$

※ この問題は特別なひねりもなく、計算が面倒という点を除けば素直な問題である。

ここで、ベクトルについて多少語ってみる。今は「数学B」という選択科目の中の一節として入っているが、EXECELLENTな高校生達は必修として学んでいることだろう。つまり大学受験科目において、文系か理系かを問わずにベクトルを出題範囲にしている大学が多い。では、このベクトルをどのように教えればよいのか。高校で初めて習う手垢の付いていない内容を教えるのが、教師として一番遣り甲斐がある。逆に言えば、中学校からの発展的な内容を教えるときに大変なのは、まず手垢を洗い流さなければならない、ということである。つまり、中学校の狭い範囲での解法のテクニックを変に暗記して、本当の意味を全く理解していない生徒を教えるのが一番大変である。長年教えてきた感触として、新しい内容を教えるとき、最初にどのようなイメージを持たせるか、というのが大事である。これを失敗すると、なかなか修正ができない。要するに、ベクトルは導入が全てである、ということである。定義としては、「ベクトルとは、向きと大きさだけで定まる量である。」という一言であるが、このイメージがなかなかつかめない。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学B」（数研出版）の抜粋－－－－－－－－

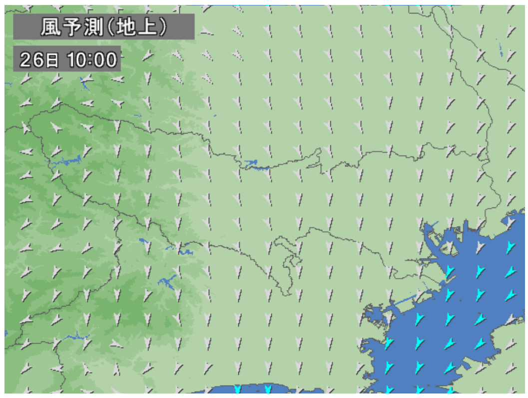
したがって，右の図のように，位置は違うが，向きが同じで大きさが等しい有向線分 AB と有向線分 CD は，ベクトルとしては，同じものを表す。



－－

ベクトルは上の図のように矢印（有効線分）で表されるが、矢印には位置がある。上下左右、いろいろな所に書けて、ノートの上の方に書いた矢印と下の方に書いた矢印は、違うもの、と誰もが思う。しかし、ベクトルになると同じである、と教えられる。矢印が指し示す方向と長さ（大きさ）が同じなら、同じもの、という概念がすんなりと理解できる生徒となかなか理解できない生徒に分かれる。経験上、なかなか理解出来ない生徒の方が将来的に伸びるが、その生徒に対し”腑に落ちる”ような教え方を考えなければならない。自分自身がベクトルを習ったときに力学的なイメージを持ったので、はじめは、生徒にも似たようなイメージで教えていたが、ベクトルの始点が作用点としたならば、その場所が違えば作用点が違うのだから違うものというイメージを払拭することはできない、と感じた。

いろいろ考えて、分かりやすいと思ったのが、現在の天気予報での解説で使われている図である。風の向きをベクトルで表した図で、今後の風の向きや強さをこれを使って説明していた。このイメージが、向きと大きさが同じならば同じもの、位置には関係ない、というがまさに「腑に落ちる」ものである。もしも、腑に落たせないまま先に進んでしまったら、せっかく伸びる将来も無に帰してしまうだろう。



$\boxed{2}$ a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える。

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点$\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点$\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

(1)の解法　$L: -4x+3y+a=0$……①、$M: 3x+4y-7a=0$……②

①と②の交点を求めると、①×3+②×4

$$
\begin{array}{rr}
 & -12x+9y+3a\quad=0 \\
+ & 12x+16y-28a=0 \\
\hline
 & 25y-25a=0
\end{array}
$$

$y=a$　①に代入して$x=a$

これより、①と②の交点(a, a)となる。

これが円C上にあるので、円の方程式に代入すると、

$a^2-2a^2+a^2-4a+4=0$　よって、$a=1$

(2)の解法　$x^2-2ax+y^2-4y+4=0$ を式変形をすると

$(x-a)^2-a^2+(y-2)^2=0$

$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$

これより、Cは中心$(a, 2)$、半径$|a|$ の円

ここで、直線Lと円の中心$(a, 2)$との距離をh とおくと

$$h=\frac{|-4a+6+a|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|-3a+6|}{5}$$

直線と円が異なる２つの共有点を持つには、

$h<|a|$ 、すなわち　$\dfrac{|-3a+6|}{5}<|a|$ となるa の値の範囲となる。

(ⅰ) $a<0$ のとき

$$\frac{-3a+6}{5}<-a$$

$-3a+6<-5a$

よって、$a<-3$

(ⅱ) $0\leqq a<2$ のとき

$$\frac{-3a+6}{5}<a$$

$a>\dfrac{3}{4}$

よって、$\dfrac{3}{4}<a<2$

(ⅲ) $a\geqq 2$ のとき

$$\frac{3a-6}{5}<a$$

$3a-6<5a$

$a>-3$

よって、$a\geqq 2$

(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ) より　$a<-3$、$\dfrac{3}{4}<a$

(3)の解法

(2)と同様にしてCとMが異なる２つの共有点をもつようなaの値の範囲を求めると、

直線Mと円の中心(a , 2) との距離をh_2とおくと $h_2=\dfrac{|3a+8-7a|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{|-4a+8|}{5}$

直線と円が異なる２つの共有点を持つには、$h_2<|a|$ なので $\dfrac{|-4a+8|}{5}<|a|$

(i) $a<0$ のとき

$$\frac{-4a+8}{5}<-a$$

$$-4a+8<-5a$$

よって、$a<-3$

(ii) $0\leqq a<2$ のとき

$$\frac{-4a+8}{5}<a$$

$$a>\frac{8}{9}$$

よって、$\dfrac{8}{9}<a<2$

(iii) $a\geqq 2$ のとき

$$\frac{4a-8}{5}<a$$

$$4a-8<5a$$

$$a>-8$$

よって、$a\geqq 2$

(i)、(ii)、(iii) より　$a<-3$、$\dfrac{8}{9}<a$

(2) の答えと合わせると、下図になる。

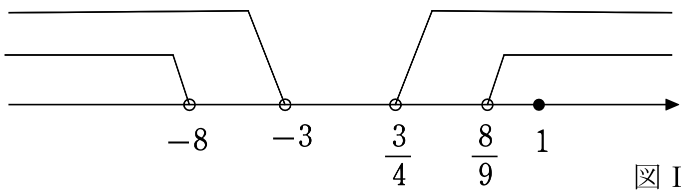
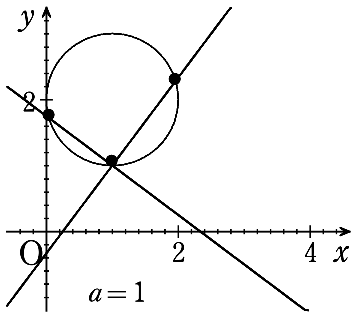


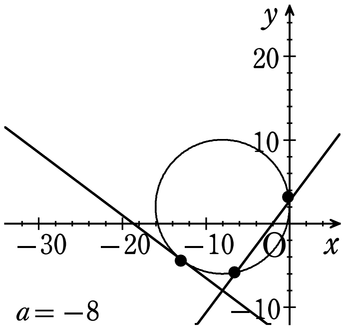
図 I

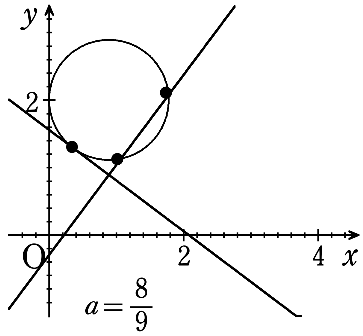
これらより、集合$\{P\mid$ 点PはCとLの共有点$\}\cup\{P\mid$ 点PはCとMの共有点$\}$ の要素の個数が３となるのは、次の２通りである。

(i) ２直線の交点が円上にあり、各直線と円との共有点が２個あるとき、(1)と図 I より $a=1$ となる。



(ii) １つの直線が円に接し、他の直線と円との共有点が２個あるとき、図 I より $a=-8$ または$a=\dfrac{8}{9}$ である。





よって、要素の個数が３となるa の値は、$a=-8$または$a=\dfrac{8}{9}$または$a=1$である。

$\boxed{3}$ n を正の整数，a, b を 0 以上の整数とする。

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 (a, b, n) をすべて求めよ。

(1)の解法

数学的帰納法で証明する。

［Ⅰ］ $n=3$ のとき

左辺$=2^3+3^2+8=25$、右辺$=3^3=27$　よって、左辺＜右辺なので、与式は成り立つ

［Ⅱ］ $n=k\ (k\geqq 3)$ のとき　$2^k+k^2+8<3^k$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$3^{k+1}=3\cdot 3^k>3(2^k+k^2+8)$ より

$$\begin{aligned}3^{k+1}-\{2^{k+1}+(k+1)^2+8\} &> 3(2^k+k^2+8)-\{2^{k+1}+(k+1)^2+8\}\\ &= 3\cdot 2^k+3k^2+24-2\cdot 2^k-k^2-2k-1-8\\ &= 2^k+2k^2-2k+15\\ &= 2^k+2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{2}>0\end{aligned}$$

すなわち、$3^{k+1}-\{2^{k+1}+(k+1)^2+8\}>0$ となり $3^{k+1}>2^{k+1}+(k+1)^2+8$となって、$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上より、数学的帰納法から$n\geqq 3$ のすべての自然数nについて与式は成り立つ。

(2)の解法

(1) より$n\geqq 3$ のとき、$2^n+n^2+8<3^n$ なので、$2^n+n^2+8\geqq 3^n$を満たすのは、少なくとも$n<3$の正の整数である。

$n=1$ のとき、左辺$=2^1+1^2+8=11$、右辺$=3^1=3$　これより左辺＞右辺なので満たす。

$n=2$ のとき、左辺$=2^2+2^2+8=16$、右辺$=3^2=9$　よって、左辺＞右辺なので満たす。

よって、$n=1, 2$

(3)の解法

$n\geqq 3$ のとき、$2^n+n^2+8<3^n$、さらに$an+b\geqq 0$ なので、、$2^n+n^2+8=3^n+an+b$となる 0 以上の整数 a、b および正の整数 n は存在しない。

$n=2$のとき、$2a+b=7$ より、$(a, b, n)=(0,7,2)$、$(1,5,2)$、$(2,3,2)$、$(3,1,2)$

$n=1$のとき、 $a+b=8$ より、$(a, b, n)=(0,8,1)$、$(1,7,1)$、$(2,6,1)$、$(3,5,1)$
$(4,4,1)$、$(5,3,1)$、$(6,2,1)$、$(7,1,1)$、$(8,0,1)$

※ここで数学的帰納法について語ろう。

導入でよく使うのは、ビルの建築と数学的帰納法は同じなんだよ、と生徒に言って、はぁ〜、という顔をさせてから話を進める、という手法である。高いビルを建てよう、と思ったとき、まず1階部分の土台を固めて作っていき、次にその1階部分の上に2階部分を作るが、その作り方を覚えておけば、次の3階部分も同じように作れるだろう。要するに、最初は土台部分である$n=1$を証明し、次にk階目までが完成されたとして、その上に$k+1$階目の作り方を示せば、nが自然数ならば何階のビルでも建設することができるだろう、と、哲学的な用語も含んでいる「数学的帰納法」にまずは親近感を持たせる。
以上のイメージを持たせながら、例えば次の例題を使ってさらに詳しく説明する。

例題　nは3以上の自然数とする。不等式$2^n>2n+1$を示せ。

［Ⅰ］ $n=3$のとき

　左辺$=2^3=8$、右辺$=2\cdot3+1=7$

　左辺$>$右辺　よって、$n=3$のとき成り立つ。

土台となる階を作っている箇所

［Ⅱ］ $n=k\ (k\geqq3)$のとき

　　$2^k>2k+1$……① が成り立つと仮定すると、

　$n=k+1\ (k\geqq3)$のとき

　　①の両辺に2を掛けると

　　$2^{k+1}>2(2k+1)$

　　$2^{k+1}>4k+2$

　　$2^{k+1}>2k+2+2k$

　　$2^{k+1}>2(k+1)+2k>2(k+1)+1$

　よって、$n=k+1\ (k\geqq3)$のときも成り立つ。

k階目のフロアーが完成したとして、その上に$k+1$階目のフロアーを作ろうとしている箇所

［Ⅰ］［Ⅱ］から、3以上のすべての自然数nについて与式は成り立つ。

　この最後の口上が大事である。これがないと全体が締まらない証明になってしまう。まるで、ビルの設計者が設計図を片手に説明し、最後に、この手順通りに建設すれば、どんな高いビルでも建てることができるんだよ、と自信を持って説明を終わっている感じである。

　実際のビルはこんな単純なものではない、というのはEXCELLENTな高校生はみんな理解している。下層階と上層階では風の強さも違うだろうし、上に乗っている重さも下になればなるほど膨大なものであろう。さらに、ビル全体の膨張の度合いも中間と上下ではかなり違うだろうと予想ができる。しかし、数学では、綺麗に作っていけば、月にまで到達するビルが建つんだよ、と夢を語っているようで、私は数学的帰納法が好きである。

$\boxed{4}$ 白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う。箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また，最初手元に玉はないものとする。

(1) 2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2) 3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。

(3) n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。

(4) (3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

(1)の解法

白→表→白→表なので、$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{40}$

(2)の解法

白	白	赤	確率
○	−	○	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{160}$
−	○	○	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{400}$

赤	赤	白	確率
○	−	○	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{320}$
−	○	○	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{200}$

白	赤	白	確率
○	○	−	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{40}$
−	○	○	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{400}$

赤	白	赤	確率
○	○	−	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{80}$
−	○	○	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{200}$

赤	白	白	確率
○	−	○	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{320}$
○	○	−	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{40}$

白	赤	赤	確率
○	−	○	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{160}$
○	○	−	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{80}$

上の表より

$$\frac{3}{160}+\frac{9}{400}+\frac{1}{40}+\frac{9}{400}+\frac{9}{320}+\frac{1}{40}+\frac{3}{320}+\frac{3}{200}+\frac{1}{80}+\frac{3}{200}+\frac{3}{160}+\frac{1}{80}$$

$$=\frac{9}{40}$$

（３）の解法

まず、取り出した玉が白になるか赤になるかは、試行が停止することに影響しないことに着目する。つまり、玉５個がなくなると試行が停止するので、ちょうど n 回で試行が停止するには、硬貨が、$n-1$ 回までに４回表が出て、n 回目に５回目の表が出る、という確率を求めればよい。

これより、$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot{}_{n-1}C_4=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$

$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}$　但し、n は５以上の整数

（４）の解法

（３）より $p_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot2^{n+3}}$

これより $p_{n+1}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}$ となるので

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot2^{n+4}}\cdot\frac{3\cdot2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}=\frac{n}{2(n-4)}$$

$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1$ とおくと、$\frac{n}{2(n-4)}>1$

ここで $n\geqq5$ なので $2(n-4)>0$ より

$n>2(n-4)$

$n<8$

すなわち、$5\leqq n<8$ のとき $p_n<p_{n+1}$

$n=8$　のとき $p_n=p_{n+1}$

$n>8$　のとき $p_n>p_{n+1}$

これより、$p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>p_{11}>p_{12}>\cdots\cdots$ となるので、

p_n が最大となるのは、$n=8$ または $n=9$ である。

※なかなか面白い問題であるが、試行を n 回 と発展させる問題の作成はかなり難しいと思う。最初、ちょうど n 回目で手元の玉が白玉１個、赤玉１個になる確率を求めさせるのかな、と不安になりながら問題を読むと、ちょうど n 回目で試行が停止する確率ということで、ホッとしながらも、じゃあ(１)と(２)は何の為にあるのかな、と訝ってしまう。でも、ちょうど n 回目の試行で玉を残したとして、手元にある玉が白玉１個、赤玉１個となる確率を求めよ、というのはかなりの難問になるのかなと思う。それをさらに試験時間内で解かせるには無理があるだろう。これは、最後の玉が白か赤によって場合分けされ、白のときは $n-1$ 回目までに手元に１個の赤を残さねばならない、などとして解いていくのだろうが、手元に１個残した時点で、箱の中の玉の個数が変わってしまうのに気付くかどうか。さらに気付いたとしてもそれをどのように解くかが難しいだろう。

5　実数 t に対して複素数 $z=\dfrac{-1}{t+i}$ を考える。ただし，i は虚数単位とする。

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 絶対値 $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$ を求めよ。

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

(1)の解法

$$z=\frac{-1}{t+i}=\frac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)}=\frac{-t+i}{t^2-i^2}=\frac{-t+i}{t^2+1}=-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}i$$

これより、実部は$-\dfrac{t}{t^2+1}$、虚部は$\dfrac{1}{t^2+1}$ となる。

(2)の解法

$$\left|z-\frac{i}{2}\right|=\left|-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}i-\frac{i}{2}\right|=\left|-\frac{t}{t^2+1}+\frac{-t^2+1}{2(t^2+1)}i\right|$$

$$=\frac{1}{t^2+1}\left|-t+\frac{-t^2+1}{2}\right|=\frac{1}{t^2+1}\sqrt{t^2+\frac{t^4-2t^2+1}{4}}=\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{(t^2+1)^2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(3)の解法

(2)から$\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ なので、点z は中心$\left(\dfrac{i}{2}\right)$、半径$\dfrac{1}{2}$ の円上にある。

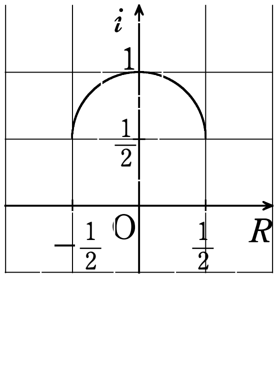
さらに、$-1\leqq t\leqq 1$ なので、$t=\tan\theta$　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ とおく。

実部　$-\dfrac{t}{t^2+1}=-\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=-\cos^2\theta\tan\theta=-\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ なので、$-\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\leqq\dfrac{1}{2}$すなわち$-\dfrac{1}{2}\leqq$実部$\leqq\dfrac{1}{2}$

虚部　$\dfrac{1}{t^2+1}=\cos^2\theta$、$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ なので、$\dfrac{1}{2}\leqq\cos^2\theta\leqq 1$すなわち$\dfrac{1}{2}\leqq$虚部$\leqq 1$

よって、点z の描く図形は右の通りである。



※この問題の図形をPYTHONを使って表示してみた。ただし、複素平面上ではなく、

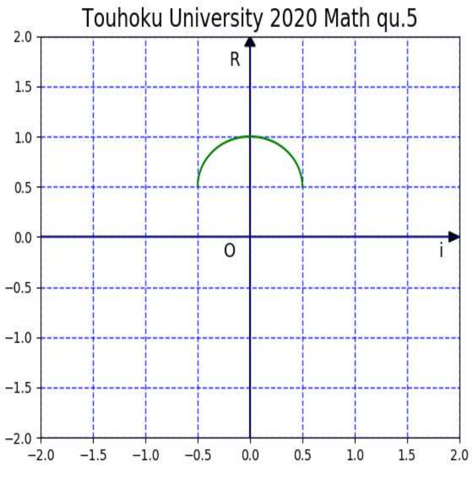
実部 $x=-\dfrac{t}{t^2+1}$、虚部 $y=\dfrac{1}{t^2+1}$ として、t を媒介変数として xy 平面上に表示した。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－PYTHON－－－－－－－－－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title(”Touhoku University 2020 Math qu.5”, fontsize = 16)
ax.set_xlim(−2,2)
ax.set_ylim(−2,2)
ax.grid(which=”major”,axis=”x”,color=”blue”,alpha=0.8,linestyle=”−−”,line
width=1)
ax.grid(which=”major”,axis=”y”,color=”blue”,alpha=0.8,linestyle=”−−”,line
width=1)
ax.arrow(0,−2,0,3.9,head_width=0.1,head_length=0.1,fc=’k’,ec=’k’)
ax.arrow(−2,0,3.9,0,head_width=0.1,head_length=0.1,fc=’k’,ec=’k’)
ax.text(−0.2,1.7,’R’,fontsize=13)
ax.text(1.8,−0.2,’i’,fontsize=13)
ax.text(−0.25,−0.2,’O’,fontsize=13)
t = np.arange(−1, 1, 0.01)
R=−t/(t**2+1)
i=1/(t**2+1)
ax.plot(R, i, color = ”green”)
plt.show()
```

－－

［出力結果］



$\boxed{6}$ 正の整数 m, n に対して実数 $A(m,n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,n)=A(n,m),\quad A(m+2,n)+A(m,n+2)=A(m,n)$$

(2) $A(m,1)$ を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,n)$ は有理数であることを示せ。

(１)の解法

$$A(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと、$dx=-dt$

x	$0\to\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2}\to 0$

$$A(m,n)=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin^m x\,dt=A(n,m)$$

$$A(m+2,n)+A(m,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos^m x\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\sin^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos^m x\sin^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\sin^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos^2 x\cos^m x\sin^n x+\cos^m x\sin^n x\sin^2 x\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x(\cos^2 x+\sin^2 x)\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\ \ dx$$

$$=A(m\ ,n)$$

（2）の解法

$$A(m\ ,1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\ \sin x\,dx=\left[\cos^m x\ (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} m\cos^{m-1} x(-\sin x)(-\cos x)dx$$

$$=1+m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x(-\sin x)dx=1+m\left[\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{m}{m+1}=\frac{1}{m+1}$$

（3）の解法

$$A(m\ ,n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\ \sin^{n+2} x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x\right)'\sin^{n+1} x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x\ \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x\right)(n+1)\sin^n x\ \cos x\,dx$$

$$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2} x\ \sin^n x\,dx=\frac{n+1}{m+1}A(m+2\ ,n)$$

（4）の解法

$$A(m\ ,n)=A(m+2\ ,n)+A(m\ ,n+2)=A(m+2\ ,n)+\frac{n+1}{m+1}A(m+2\ ,n)$$

$=\dfrac{m+n+2}{m+1}A(m+2\ ,n)$　これより　$A(m+2\ ,n)=\dfrac{m+1}{m+n+2}A(m\ ,n)$

ここで、$[x]$をxの値を超えない整数とすると、

$$A(m\ ,n)=\frac{m-1}{m+n}A(m-2\ ,n)=\frac{m-1}{m+n}\cdot\frac{m-3}{m+n-2}A(m-4\ ,n)=\cdots\cdots=$$

$$=\frac{m-1}{m+n}\cdot\cdots\cdot\frac{m-(2k-1)}{m+n-2(k-1)}\cdot\cdots\cdot\frac{m-\left(2\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)}{m+n-2\left(\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)}A\left(m-2\left[\frac{m}{2}\right],n\right)$$

mが奇数のとき、$2\left[\dfrac{m}{2}\right]=m-1$なので

$$A(m\ ,n)=\frac{m-1}{m+n}\cdot\cdots\cdot\frac{m-(2k-1)}{m+n-2(k-1)}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n+3}A(1\ ,n)$$

さらに、$A(1\ ,n)=A(n\ ,1)=\dfrac{1}{n+1}$なので、

$A(m,n)=\dfrac{m-1}{m+n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{m-(2k-1)}{m+n-2(k-1)}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{n+3}\cdot\dfrac{1}{n+1}$

これより、m が奇数ならば、$A(m,n)$ は有理数になる。また、$A(m,n)=A(n,m)$ なので、上と同様にして、n が奇数ならば、$A(m,n)$ は有理数になる。

※この問題の参考として、以下に教科書の内容を掲載する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅲ」数研出版　抜粋－－－－－－－－－－

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ の値

n は 0 または正の整数とする。このとき，次の定積分を求めてみよう。

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$n=0$，$n=1$ のときは，それぞれ次のように計算される。

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$n\geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'\,dx\\&=\Big[-\sin^{n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx\\&=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)\\&=(n-1)(I_{n-2}-I_n)\end{aligned}$$

よって，漸化式 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立ち，I_n は次のようになる。

n が偶数のとき　　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

n が奇数のとき　　$I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

更に，$\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ であるから，次の等式が成り立つ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－以上　「数学Ⅲ」数研出版からの抜粋　－－－－－－