２０２０年度　大阪大学　数学（理）
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

大阪大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに５題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

$\boxed{1}$　関数

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \qquad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてもよい．

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．

（配点率 20 ％）

（１）の問題は、まずはグラフがどのようになるのかな、と考え、この両辺のlog を取ってから微分して増減表を作ってみる、という、まさに微分の王道のような問題である。

$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$、$x\geqq 0$ から右辺$\geqq 0$ なので、$\log f(x)=\log(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ が成り立つ。

これより、$\log f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x+1}$

この両辺をx で微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\dfrac{x+1}{x+1}-1\cdot\log(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\text{、}f'(x)=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\cdot f(x)$$

$f'(x)=\dfrac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\cdot(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$　ここで$f'(x)=0$ とおくと

$1-\log(x+1)=0$ 、$x=e-1$ となり、増減表は以下の通りである。

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

この表より、最大値は$f(e-1)=e^{\frac{1}{e}}$である。

（２）の問題は、極限の基本的な問題である。そのまま次のように筆が進むと思う。

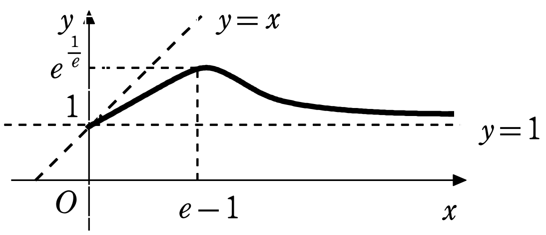
$$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}=0\text{なので、}\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

次に、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\cdot f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}\cdot f(x)$

$$=(0-0\times 0)\cdot 1=0$$

※入試問題としてはあっさり解けてしまったので、果たしてこれでいいのかどうか不安になる。ここで、$\infty-\infty$や$\dfrac{0}{0}$ は不定形で、極限値を求める場合式変形をしなければならない、というのは受験テクニックとしては必須項目である。そこで、$0-0$ は果たしてどうだったかな、と不安が横切るが、0 は0 としての収束値なのでそのような心配はいらない。実際、増減表を考えても、$x=1$ が漸近線になるので、その傾きは限りなく0 に近づく。ある意味、簡単過ぎてむしろ戸惑ってしまう問題であろう。

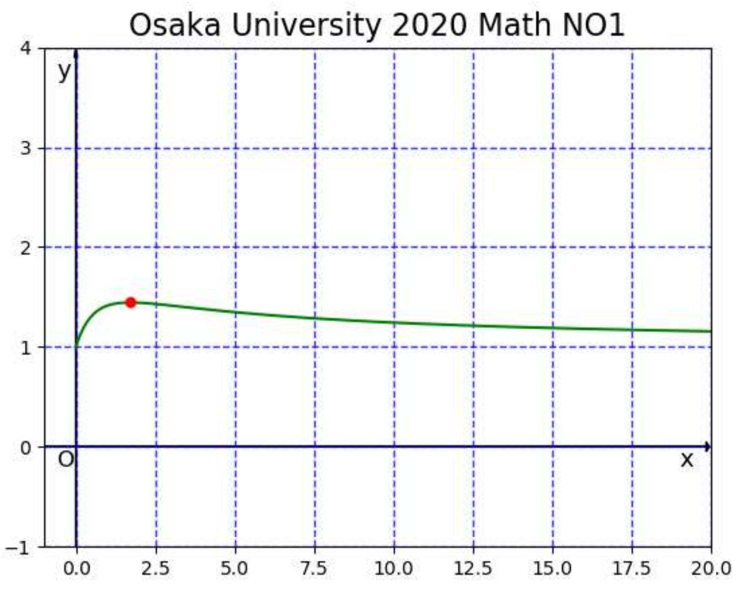
（３）は（１）と（２）が出来れば、そのまま概形図を描けばよい。さらに、グラフの凹凸も調べなくて良いので、受験生にとっては、やったぁ～と叫びたく問題だろう。



せっかくだから、ここでPythonを使ってこのグラフを描画してみる。

－－－－－－－－－－－－－－Python のプログラムと出力結果－－－－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title("Osaka University 2020 Math NO1", fontsize = 16)
ax.set_xlim(-1,20)
ax.set_ylim(-1,4)
ax.arrow(0,-2,0,5.9,head_width=0.1,head_length=0.1,fc='k',ec='k')
ax.arrow(-2,0,21.85,0,head_width=0.1,head_length=0.1,fc='k',ec='k')
ax.text(-0.6,3.7,'y',fontsize=13)
ax.text(19,-0.2,'x',fontsize=13)
ax.text(-0.6,-0.2,'O',fontsize=12)
ax.grid(which="major",axis="x",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",line
width=1)
ax.grid(which="major",axis="y",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",line
width=1)
x = np.arange(0, 20, 0.0001)
y = (x+1)**(1/(x+1))
ax.plot(x, y, color = "green")
x = np.e-1
y = (x+1)**(1/(x+1))
ax.plot(x, y, marker='.',markersize=10,color = "red")
plt.show()
```



2 1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$，出た目が 2 の場合は $X_k = -1$，その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする．

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3 \cdots Y_n$ を Z_n で表す．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) Z_2 が実数でない確率を求めよ．

(2) Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ．

(3) Z_n が実数となる確率を p_n とする．p_n を n を用いて表し，極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

（配点率 20 %）

(1)を解く。まず、Z_2 とは何か、を考えなければならない。つまり、この問題文をしっかりと読めるかどうか、ということであろう。$Y_1Y_2Y_3 \cdots Y_n$ を Z_n で表す、とあるので、$Z_2 = Y_1Y_2$ となる。$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$ なので、複素数の積の公式から、

$$Z_2 = Y_1Y_2 = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}X_1\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_1\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}X_2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_2\right)\right\}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2) + i\sin\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2)$$ となる。

ここで、X_1、X_2 は、1、-1、0 のいずれかの数である。問題文は Z_2 が実数でない、とあるので、この複素数の虚部が 0 以外、すなわち $\sin\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2)$ が 0 以外の数でなければならない。ここで、$\sin\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2)$ が 0 になる確率を求めて 1 から引く、という余事象の確率の手法を使ってみる。$\sin\frac{\pi}{3}(X_1 + X_2) = 0$ となるのは、$X_1 + X_2$ が 0 になるときである。

X_1、X_2 は、1、-1、0 のいずれかの数であるから、$X_1 + X_2$ は -2、-1、0、1、2 のいずれかであり、$X_1 + X_2$ が 0 になるのは、次の 3 通りである。

① $(X_1, X_2) = (-1, 1)$　② $(X_1, X_2) = (1, -1)$　③ $(X_1, X_2) = (0, 0)$

①は、サイコロを 2 回投げて、1 回目に 2 の目、2 回目に 1 の目が出る確率なので、

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

②は、1 回目に 1 の目、2 回目に 2 の目が出る確率なので、$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

③は、１回目に３～６の目、２回目も３～６の目が出る確率なので、$\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{9}$

①から③より、X_1+X_2 が 0 になる確率は $\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$

よって、X_1+X_2 が 0 にならない、すなわちZ_2 が実数でない確率は $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ となる。

次に(２)を解く。(１) と同じように考えるならば、Z_1、Z_2、Z_3、…、Z_n がいずれも実数ではない、の余事象は、Z_1、Z_2、Z_3、…、Z_n の少なくとも一つは実数である、となる。

実数であるのをZ_k とおくと、$\sin\dfrac{\pi}{3}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_k)=0$ となるので、

$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_k$ が０及び負の数を含む３の倍数になればよい。

つまり、$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_k=3m$、ただし、$m$ は整数 となるが、これを使ってこの問題を解くのは、ちょっと大変そうである。例えば、k=3 のときを考えたら、

1+1+1=3、1−1+0=0、−1−1−1=−3 のように、ある程度パターン化出来なくもないが、ちょっと煩雑になりすぎる気がする。それで、他に何か手法がないかな、と頭を悩ましてみる。そのとき、下の教科書の内容を思い出した。

――――――――――――――――――――――――「数学Ⅲ（数研出版）」の抜粋――――――

例　1 の 6 乗根は

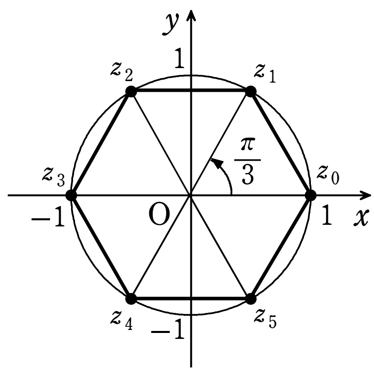
$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5)$$

よって　$z_0=1$,　$z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,　$z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3=-1$, $z_4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　終

例 で求めた 6 個の 1 の 6 乗根は，点 1 が分点の 1 つとなるように，単位円を 6 等分する 6 個の分点を与えている。

よって，これらの点は単位円に内接する正六角形の頂点になっている。

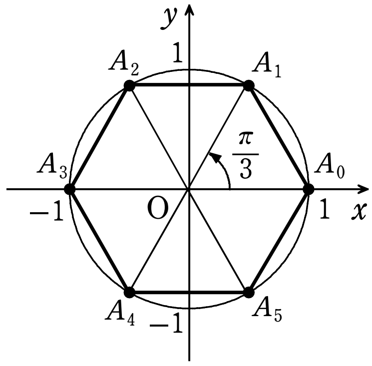


――――――――――――――――――――――――「数学Ⅲ（数研出版）」の抜粋――――――

これを使えないか考えてみると、この問題は上の図の６つの頂点に存在する確率、ということになる。つまり、上の図において、点がZ_1、Z_2、Z_4 およびZ_5にくる確率を求める、ということになる。この図でのZ_n と問題文のZ_n は違うものなので、混乱を避けるために新しい図を考える。まず、点の名前を A_0 から A_5 とし、さらに新たに「$Z_k(A_1)$」 をk 回

目の試行のときに、A_1にいる確率とする。ここでk回目にA_1にいる確率を考える。

$k-1$回目からk回目にA_1にいる確率は、$A_0\to A_1$または$A_1\to A_1$または$A_2\to A_1$であるが、A_0とA_3には、点がこないので、$A_0\to A_1$はありえない。つまり、$A_1\to A_1$と$A_2\to A_1$の２通りである。このことを踏まえて漸化式を作ると、



$Z_k(A_1)=Z_{k-1}(A_1)\times\frac{4}{6}+Z_{k-1}(A_2)\times\frac{1}{6}$……①

同様にして、$k-1$回目からk回目にA_2、A_4、A_5にいる

確率は、$Z_k(A_2)=Z_{k-1}(A_2)\times\frac{4}{6}+Z_{k-1}(A_1)\times\frac{1}{6}$……②

$Z_k(A_4)=Z_{k-1}(A_4)\times\frac{4}{6}+Z_{k-1}(A_5)\times\frac{1}{6}$……③

$Z_k(A_5)=Z_{k-1}(A_5)\times\frac{4}{6}+Z_{k-1}(A_4)\times\frac{1}{6}$……④

①＋②　$Z_k(A_1)+Z_k(A_2)=Z_{k-1}(A_1)\times\frac{5}{6}+Z_{k-1}(A_2)\times\frac{5}{6}$

$=\frac{5}{6}\{Z_{k-1}(A_1)+Z_{k-1}(A_2)\}$

これは、数列$\{Z_k(A_1)+Z_k(A_2)\}$が、初項 $Z_1(A_1)+Z_1(A_2)=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$、公比$\frac{5}{6}$の

等比数列なので、$Z_k(A_1)+Z_k(A_2)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$……⑤

同様にして③＋④を計算すると、$Z_k(A_4)+Z_k(A_5)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$……⑥

以上より、k回目に実数でない、すなわち、点がA_1かA_2かA_3かA_4上にいる確率は、

⑤＋⑥より、$Z_k(A_1)+Z_k(A_2)+Z_k(A_4)+Z_k(A_5)=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

これはk回目に実数でない確率であるが、この漸化式を作ったときに$k-1$回目も実数ではないとしている。

すなわち、Z_1、Z_2、Z_3、…、Z_nがいずれも実数ではない確率は、$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$となる。

(３)はZ_nが実数となる確率なので、n回目より前が実数になるとは言っていない。これを念頭に置いて(２)と同様にして漸化式を作ってみる。

$Z_k(A_0)=Z_{k-1}(A_0)\times\frac{4}{6}+Z_{k-1}(A_1)\times\frac{1}{6}+Z_{k-1}(A_5)\times\frac{1}{6}$……①

$Z_k(A_3)=Z_{k-1}(A_3)\times\frac{4}{6}+Z_{k-1}(A_2)\times\frac{1}{6}+Z_{k-1}(A_4)\times\frac{1}{6}$……②

ここでZ_nが実数になるには、A_0またはA_3のときなので、

①＋②より　$Z_k(A_0)+Z_k(A_3)=$

$$\frac{2}{3}\{Z_{k-1}(A_0)+Z_{k-1}(A_3)\}+\frac{1}{6}\{Z_{k-1}(A_1)+Z_{k-1}(A_2)+Z_{k-1}(A_4)+Z_{k-1}(A_5)\}$$

この形を見て、しばし途方に暮れてしまった。このやり方では解けないんじゃないか、と不安になってしまった。これが本番ならば、時計を見つめながら背中のいやな汗を感じることだろう。このとき、あっ、と気付く。それは次の一行である。

$$Z_{k-1}(A_0)+Z_{k-1}(A_1)+Z_{k-1}(A_2)+Z_{k-1}(A_3)+Z_{k-1}(A_4)+Z_{k-1}(A_5)=1$$

全事象の確率は１である。言われてみれば当たり前であるが、ここでそれを気付くかどうかである。これで $Z_{k-1}(A_0)+Z_{k-1}(A_3)$だけで漸化式が作れると思い、もしここが受験会場であったとしても声を上げて喜んでいただろう。

$Z_{k-1}(A_1)+Z_{k-1}(A_2)+Z_{k-1}(A_4)+Z_{k-1}(A_5)=1-\{Z_{k-1}(A_0)+Z_{k-1}(A_3)\}$となって、

つまり、$Z_k(A_0)+Z_k(A_3)=\frac{2}{3}\{Z_{k-1}(A_0)+Z_{k-1}(A_3)\}+\frac{1}{6}\{1-Z_{k-1}(A_0)-Z_{k-1}(A_3)\}$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\{Z_{k-1}(A_0)+Z_{k-1}(A_3)\}$$

ここで、$Z_k(A_0)+Z_k(A_3)=T_k$ とおくと、$T_k=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}T_{k-1}$……①となる。

この形は、漸化式の定番である。以下に教科書の内容を載せる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ｂ（数研出版）」の抜粋－－－－－

○ $a_{n+1}=pa_n+q$ の形

p，q は定数で，$p\neq 0$，$p\neq 1$ とする。数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q \qquad \cdots\cdots ①$$

と初項 a_1 が与えられたとき，一般項 a_n を求める方法を考えよう。

① に対して，等式

$$c=pc+q \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす定数 c を考える。①－② から

$$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$$

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} &= pa_n+q \\ -) & c &= pc \ \ +q \\ \hline & a_{n+1}-c &= p(a_n-c) \end{array}$$

よって，数列 $\{a_n-c\}$ は初項 a_1-c，公比 p の等比数列であり，このことを利用して，一般項 a_n が求められる。

例えば，漸化式 $a_{n+1}=3a_n+2$ は，$c=3c+2$ を満たす定数 $c=-1$ を用いて，$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ と変形することができる。このことを利用して，次の問題を考えてみよう。

例題　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=3a_n+2$$

解　$a_{n+1}=3a_n+2$ を変形すると　　$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

ここで，$b_n=a_n+1$ とおくと

$$b_{n+1}=3b_n, \qquad b_1=a_1+1=1+1=2$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列で$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

$a_n = b_n - 1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ｂ（数研出版）」の抜粋－－－－－－

この解法をしっかりと理解して覚えている人は、漸化式が $T_k = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}T_{k-1}$……① の形になった時点で、解けた、と確信する。つまり、

$c = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}c$ とおくと、$c = \frac{1}{3}$ となり、①の両辺から $\frac{1}{3}$ を引くと、

$T_k - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(T_{k-1} - \frac{1}{3}\right)$ となる。

これは、数列 $\left\{T_k - \frac{1}{3}\right\}$ が初項 $T_1 - \frac{1}{3} = Z_1(A_0) + Z_1(A_3) - \frac{1}{3} = \frac{4}{6} + 0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列になるので、$T_k - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ $\therefore T_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}$

この T_k とは、k 回目の試行で点が A_0 または A_3 になる確率、すなわち、k 回目の試行で Z_k が実数になる確率である。つまり、Z_n が実数になる確率 $p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$ となる。

よって、$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$

※この問題のポイントは、(２)と(３)の違いを理解できるかどうかなのでは、と思う。正直に言って、最初(２)を解くときに、(３)を解いてから余事象を使って(２)を解こうと考えた。でも、わざと順番を逆にするような入試問題は見たことがないな、と悩んだ末、(３)の余事象が(２)にならないことに気付いた。要するに、問題文にある「Z_1、Z_2、Z_3、…、Z_n がいずれも実数ではない」という文言をどのように捉えるか、ということである。次に考えたのは、Z_1、Z_2、Z_3、…、Z_n が実数でない確率を一つずつ求め、それを全て掛けるのかな、と考えた。が、それも簡単ではない。それではどうするか。とそのとき、上の解答にある図が浮かんできて、漸化式を作ろう、と思い付いた。これでようやく、問題文にある「いずれも」という意味が分かった。つまり、n 回の全ての試行で、一度も A_0 と A_3 には止まらない確率を求めよ、という意味である、ということが分かった。このような過程を踏まえて、上の解き方が見えてきた。

解き終わってみるとなかなか面白い問題だった気がする。が、解いている最中はまさに暗中模索、暗闇の中を闇雲に走っているだけで、迷子になったような気になってしまってた。日が差してきたのは、図を使って漸化式で解いてみよう、と思い付き、その漸化式が解けそうだ、気付いた時である。まさに一条の光が差してきた気分である。その光に向かってまっしぐらに進んでいるときは、一心不乱、食事を取るのも忘れてしまう。このような経験が、将来何か新しいものを創り出すときに、Excellentな高校生にとって特に大事なことなのでは、と思う。

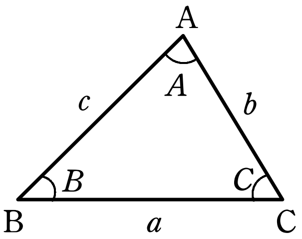
3　n を 2 以上の自然数とする．三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す．$\angle ACB = n\angle ABC$ であるとき，$c < nb$ を示せ．

（配点率 20 %）

この問題を読んだとき、いろいろなものを思い出すが、それをまとめてみる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学ＩＡⅢ（数研出版）」の抜粋－－－－－－

以下では，△ABC において，頂点 A，B，C に向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表し，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C で表す。



三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の **外接円** という。
三角形について，次の **正弦定理** が成り立つ。

正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ｉ（数研出版）」の抜粋－－－－－－

三角形の３辺の大小関係

1 つの三角形において

1　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

2　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

逆に，正の数 a，b，c が ① を満たすとき，3 辺の長さが a，b，c である三角形が存在する。① を 1 つの式にまとめると，次のようになる。

$$|b-c| < a < b+c$$

また，正の数 a，b，c の中で a が最大であれば，3 辺の長さが a，b，c である三角形が存在するための条件は，$a < b+c$ である。

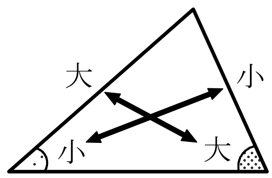
【注意】 $|b-c|$ は $b \geqq c$ のとき $b-c$，$b < c$ のとき $c-b$ を意味する。

三角形の辺と角の大小関係

1 つの三角形において

1　大きい辺に向かい合う角は，小さい辺に向かい合う角より大きい。

2　大きい角に向かい合う辺は，小さい角に向かい合う辺より大きい。



－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ａ（数研出版）」の抜粋－－－－－－

例題　$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$e^x>1+x$$

証明　$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと　　$f'(x)=e^x-1$

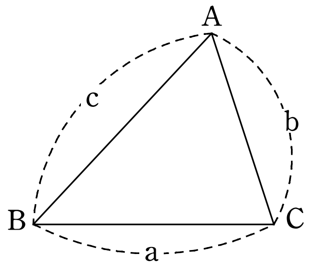
$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$f(0)=0$ から，$x>0$ のとき　　$f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　　$e^x>1+x$　　終

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅲ（数研出版）」の抜粋－－－－－－



いろいろ悩んだ挙句、以下のような証明になった。

$c<nb$ の証明は、$nb-c$ が n ２以上の自然数において常に正になることを示せばよい。

$\angle ABC=B$、$\angle ACB=C$、$\angle BAC=A$

さらに、外接円の半径Rとおくと、

正弦定理より、$b=2R\sin B$、$c=2R\sin C$ となる。

ここで、$F=nb-c$ とおくと、

$F=nb-c=2nR\sin B-2R\sin C=2R(n\sin B-\sin C)$ となり、

さらに、$C=nB$ なので、$F=2R(n\sin B-\sin nB)$

ここで、関数 $f(x)=n\sin x-\sin nx$ について考える。

$f'(x)=n\cos x-n\cos nx=n(\cos x-\cos nx)$

$0<x<\pi$ のとき、$y=\cos x$ は単調減少になるので、$x<nx<\pi$ なので、

$\cos x>\cos nx$ となる。すなわち $f'(x)=n(\cos x-\cos nx)>0$ となる。

これは、$f(x)$ が単調増加となることを示していて、さらに、$f(0)=0$ なので、

$0<x<\pi$ で $f(x)=n\sin x-\sin nx>0$ となる。

要するに、$0<B<\pi$ なので、$F=2R(n\sin B-\sin nB)>0$ となる。

以上より、$\angle ACB=n\angle ABC$ のとき、$c<nb$ となる。

※この問題は、何を訊きたいのか分からない問題である。最初は、数学的帰納法で証明するのかな、と考えたけど、関数を使って証明した方が簡単じゃないかな、と気付いて、上のような解答にした。多分、もっと面白い解法があるとは思うが、実際の本番で出題されたら、そのような証明を考えるよりは、手を動かしたくなるだろう。解き終わっても、正解なのかどうか、かなり不安になる。もしかして、突っ込まれる箇所があるのでは、と思ってチェックするが、そのような箇所が見つからない。私が高校生だったときに、絶対大丈夫、と安心して提出した答案に、うっかりミスがあり、悔しい思いをした経験が多々ある。それが頭によぎってしまう問題である。

$\boxed{4}$ t を正の実数とする．xy 平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad xy \leqq 1, \qquad x+y \leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\bigl(S(t)-2\log t\bigr)$ を求めよ．

（配点率 20 ％）

まず数学Ⅲの教科書を復習してみよう。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅲ（数研出版）」の抜粋－－－－－－－

面積Ⅱ

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

例題　区間 $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

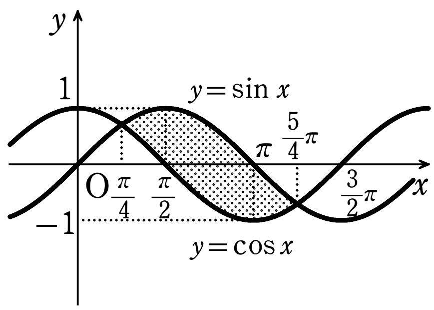
解　2 つの曲線の交点の x 座標は，方程式

$\sin x = \cos x$

の解である。

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ の範囲においてこれを解くと

$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$



また，図からもわかるように，与えられた区間では　$\sin x \geqq \cos x$

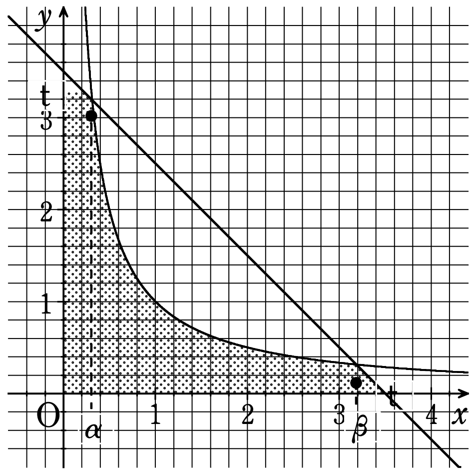
であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Bigl[-\cos x-\sin x\Bigr]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅲ（数研出版）」の抜粋－－－－－－－

$t \longrightarrow \infty$ のときを考えるので、右図のように $t>2$ としても極限値には影響しない。



ここで、$y=\dfrac{1}{x}$ と $y=-x+t$ との交点の x 座標を α、β（$\alpha<\beta$）とおくと、

$$S(t)=\frac{1}{2}t^2-\int_{\alpha}^{\beta}\left(-x+t-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\left[-\frac{1}{2}x^2+tx-\log|x|\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-t(\beta-\alpha)+\log|\beta|-\log|\alpha|$$

$$=\frac{1}{2}t^2+(\beta-\alpha)\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-t\right\}+\log\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

α、β は、方程式 $\dfrac{1}{x}=-x+t$ の解、すなわち2次方程式 $x^2-tx+1=0$ の解となるので、

$\alpha=\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$、$\beta=\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ となる。

これより、$\alpha+\beta=t$、$\beta-\alpha=\sqrt{t^2-4}$、$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}}=\dfrac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}$

これらを代入すると、$S(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}+\log\dfrac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}$

よって、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S(t)-2\log t)=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}-2\log t\right\}$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{t^2-t\sqrt{t^2-4}}{2}+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2}-\log t^2\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{t\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)}{2}+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2t^2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{4t}{2\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)}+\log\frac{t^2-2+t\sqrt{t^2-4}}{2t^2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{t^2}}\right)}+\log\frac{1-\dfrac{2}{t^2}+\sqrt{1-\dfrac{4}{t^2}}}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-0}\right)}+\log\frac{1-0+1}{2}$$

$$=\frac{2}{2}+\log 1$$

$$=1$$

※まさに教科書通り、数学Ⅲの直球ど真ん中の問題である。教科書でこの単元を教えた後に、応用問題として使える問題である。

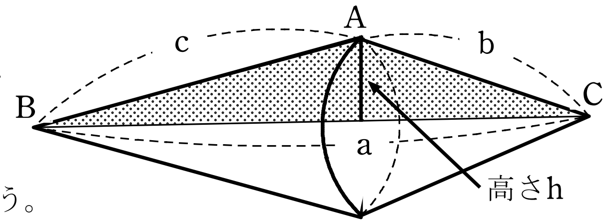
5　3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す．三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値を固定して b の値を変化させるとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が 辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．これを示せ．

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ．

（配点率 20 %）

△ABC の高さをh とおくと
h は 2 つの円錐の底面の半径になるので、
回転体の体積 $V=\dfrac{1}{3}\pi h^2 a$ となる。



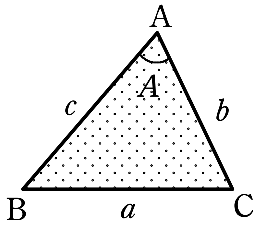
ここまでは、誰でもが考え付くことと思う。
その後、$a+b+c=2$ という条件をどのように使うのかに頭を悩ましてしまう。a を固定し、b の値を変化させるので、$\angle ABC=\theta$ とおいて、体積V をa とθ で表して、θ の関数とみなして最大値を求めようかな、と思ったが、$a+b+c=2$ という条件をどのように使ったらいいのか、皆目見当が付かなかった。そこで、この$a+b+c=2$ というじっと見ていたら、次の公式が思い出された。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学 I （数研出版）」の抜粋－－－－－－

ヘロンの公式

△ABC の面積 S を，3 辺の長さ a，b，c で表してみよう。

余弦定理により，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ であるから



$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)$$
$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

ここで，$a+b+c=2s$ とおくと

$$-a+b+c=2(s-a),\ a-b+c=2(s-b),\ a+b-c=2(s-c)$$

したがって　$\sin^2 A=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{(bc)^2}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$

これを $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ に代入すると，次の **ヘロンの公式** が得られる。

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad ただし\quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学 I （数研出版）」の抜粋－－－－－－－

これを使ってみようと考えたら、次のような答案になった。

$\triangle$ABC の面積 S とおくと、$\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ なので、

ヘロンの公式より面積 $S=\sqrt{(1-a)(1-b)(a+b-1)}$。さらに、$S=\dfrac{1}{2}ah$ なので、

$h=\dfrac{2\sqrt{(1-a)(1-b)(a+b-1)}}{a}$ となる。ここで、a の値を固定してbの値を変化させて、

体積V が最大になるときを考えるので、a を定数として体積$V(b)$ を式変形すると、

$$V(b)=\frac{1}{3}\pi h^2 a=\frac{4\pi(1-a)(1-b)(a+b-1)a}{3a^2}=\frac{4\pi(1-a)(1-b)(a+b-1)}{3a}$$

$$=\frac{4\pi(1-a)}{3a}\{-b^2-(a-2)b+a-1\}=\frac{4\pi(1-a)}{3a}\left\{-\left(b-\frac{2-a}{2}\right)^2+\frac{(a-2)^2}{4}+a-1\right\}$$

$$=-\frac{4\pi(1-a)}{3a}\left\{\left(b-\frac{2-a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right\}$$

ここで、$a+b+c=2$ さらに $a<b+c$ より $a<2-a$、$0<a<1$なので$-\dfrac{4\pi(1-a)}{3a}<0$

となるので、$V(b)$ は上に凸の放物線となり、$b=\dfrac{2-a}{2}$ のとき、最大値 をとる。

ここで、$b=\dfrac{2-a}{2}$ を$a+b+c=2$ に代入すると、

$c=2-a-b=2-a-\dfrac{2-a}{2}=\dfrac{4-2a-2+a}{2}=\dfrac{2-a}{2}$ となるので、

よって、$V(b)$ は$b=c$ の二等辺三角形のときに最大となる。

（2）（1）より$b=\dfrac{2-a}{2}$ のとき、最大値 $-\dfrac{4\pi(1-a)}{3a}\left\{-\dfrac{a^2}{4}\right\}=\dfrac{\pi(1-a)a}{3}$

これをa の関数とみなして、$V(a)=\dfrac{\pi}{3}(-a^2+a)=\dfrac{\pi}{3}\left\{-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$

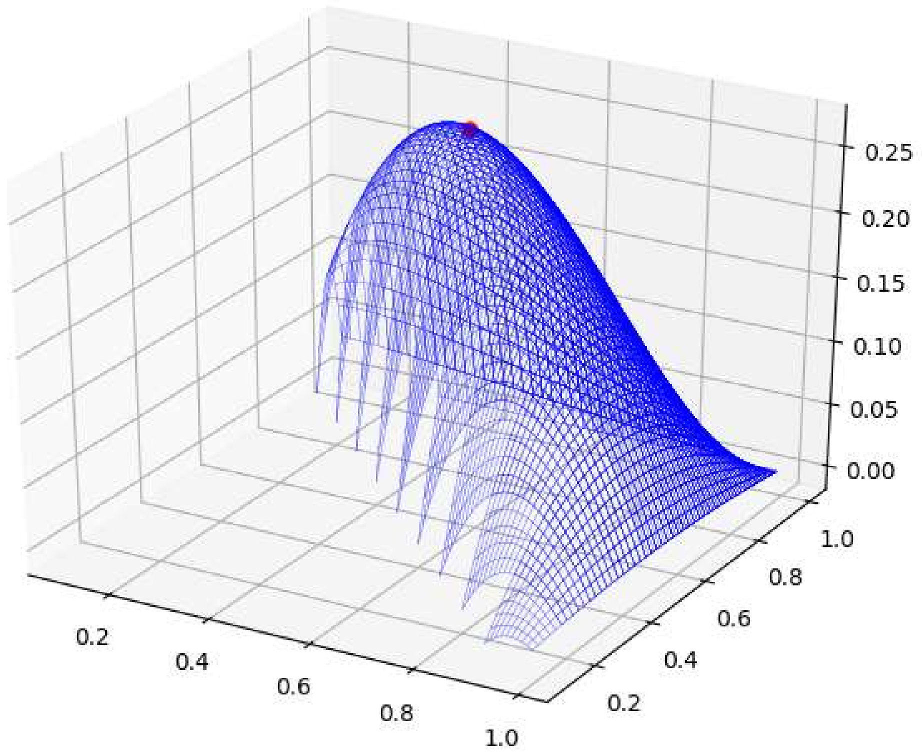
これより、$a=\dfrac{1}{2}$ 、$b=\dfrac{3}{4}$のとき、最大値 $\dfrac{\pi}{12}$ となる。

ここでPythonを使って体積Vのグラフを描画してみる。

－－－－－－－－－－－－－－Python のプログラムと出力結果－－－－－－－－－－－－－

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
a = [[np.arange(0.1*i,1,0.01)] for i in range(1,10)]
b = [[np.arange(1−0.1*i,1,0.01)] for i in range(1,10)]
for i in range(9):
   X,Y = np.meshgrid(a[i],b[i])
   Z=4*np.pi*(1−X)*(1−Y)*(X+Y−1)/(3*X)
   ax.plot_wireframe(X,Y,Z,color=”blue”,linewidth=0.2)

ax.scatter(1/2,3/4,np.pi/12,s=40,c=”red”)
plt.show()
```



※このプログラムで表示されている最大となる赤点は、先ほどの解答を確認するつもりで、（2）で求めた値をそのまま使っており、プログラムとして関数の最大値を求めたものではない。このグラフを見ると上の答えは正解であると確信できる。