２０２０年度　名古屋大学　数学(理)
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

名古屋大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに４題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

$\boxed{1}$ 双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とする。以下の問に答えよ。

(1) 直線 $ax-by=1$ が C_1，C_2 の両方と１点ずつで交わるための a，b の条件を求めよ。

(2) a，b は(1)で求めた条件をみたすものとする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとり，直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする。このとき△APQ の面積 S を a，b を用いて表せ。

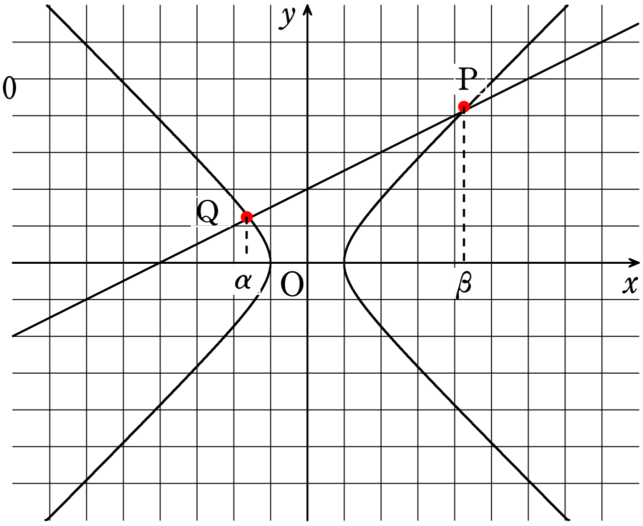
(3) 面積 S の最小値を求めよ。また，その最小値をとるための a，b の条件を求めよ。

この問題を読んだとき、２次曲線と直線から２次方程式を作って、その２つの解が異符号になる条件を見つければよい、という直球勝負の問題なのかな、とまず思う。しかし、この手の直球には、たまに癖玉があって、所々落とし穴があったりする。この手の落とし穴としては、式変形で文字の割り算をするとき、それが０であるときの真偽を考えなければならない、というのを忘れてしまうことである。この場合、直線を$y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ とするので、$b=0$ の真偽であるが、このとき $ax=1$ となり、$a\fallingdotseq 0$なので、直線$x=\dfrac{1}{a}$となって、x 軸に垂直な直線となる。これは２次曲線と直線が少なくとも２点で交わるという条件には適さない。ということは、本当に直球であり、そのまま球に合わせて打ち返せばヒットになりそうな問題である。ただ、直線 $ax-by=1$ の形が綺麗なので、何か見事な解法がありそうな気がするが、本番にはそれを考えている時間的な余裕もないだろうし、代入して作る２次方程式の式変形もそれほど面倒くさいものでもなさそうなので、まさにそのままバットを出して打ち返したのが以下の解法である。

(1) の解法　2次曲線と直線が共有点を２つ持ち、そのx座標が異符号になるようなa、bの条件を求めよ、という意味になる。

直線 $ax-by=1$ において、

$b=0$ の直線は問題に適さないので、$b\fallingdotseq 0$ とし、$y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$……①となる。



これを$x^2-y^2=1$……② に代入すると、

$$x^2-\left(\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\right)^2=1$$

$$x^2-\left(\frac{a^2}{b^2}x^2-\frac{2a}{b^2}x+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

$$b^2x^2-a^2x^2+2ax-1-b^2=0$$

$$(b^2-a^2)x^2+2ax-1-b^2=0$$

問題から解が少なくとも２つあるので、２次方程式にならなければならない。すなわち、$b^2-a^2\fallingdotseq 0$ のとき、この２次方程式の解をα、β とおくと、

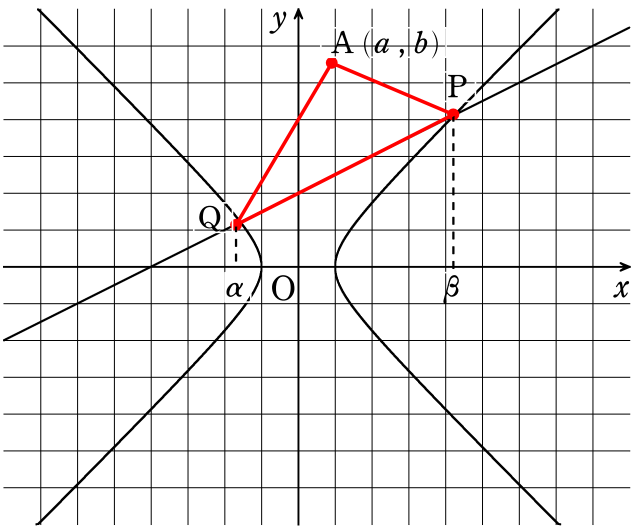
α、β が異符号の実数解を持てばよいので、$\alpha\beta<0$ となる。すなわち、$b^2-a^2\fallingdotseq 0$ かつ $\alpha\beta<0$ が上図のような正負での共有点を持つための必要十分条件である。

ここで、２次方程式の解と係数の関係から、$\alpha\beta=\dfrac{-1-b^2}{b^2-a^2}<0$ から、$b^2-a^2>0$となり、

これは$b^2-a^2\fallingdotseq 0$ も満たすので、よって、a、b の条件は、$b^2-a^2>0$となる。

次に、(2) を考えるが、(1) の条件を満たす点$A(a\,,b)$は不等式の領域 $y>x$ かつ $y>-x$ または $y<x$ かつ $y<-x$ である。この条件を満たす点$A(a\,,b)$の中で、三角形が出来ないのは、点$A(a\,,b)$が直線上にあるときだけであるが、$a^2-b^2=1$となるのは、(1) からありえない。つまり、これも直球勝負の問題だと思う。要するに、線分PQの長さを２点間の距離で求めて、それを底辺とし、点A から直線 $ax-by=1$ への距離を求め、それを高さにする。まさに、教科書に出てくるような標準的な問題である。

(2) の解法　右図のような三角形の面積を求める問題であり、このとき２点P、Q は直線$y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$上の点なので、



点$Q\left(\alpha\,,\dfrac{a}{b}\alpha-\dfrac{1}{b}\right)$、点$P\left(\beta\,,\dfrac{a}{b}\beta-\dfrac{1}{b}\right)$とおける。

$$PQ=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\left(\frac{a}{b}\beta-\frac{a}{b}\alpha\right)^2}$$

$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{a^2}{b^2}(\beta-\alpha)^2}$$

$=|\beta-\alpha|\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$　ここで、$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{-2a}{b^2-a^2}\right)^2-4\frac{-1-b^2}{b^2-a^2}$

$$=\frac{4a^2+4(b^2-a^2)(1+b^2)}{(b^2-a^2)^2}=\frac{4b^2(b^2-a^2+1)}{(b^2-a^2)^2}$$

$\beta>\alpha$、$b^2-a^2>0$ なので、$|\beta-\alpha|=\frac{2b\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$

これより、$PQ=\frac{2b\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\frac{2\sqrt{(b^2-a^2+1)(a^2+b^2)}}{b^2-a^2}$

さらに、この三角形の底辺をPQとしたときの高さは、直線$ax-by=1$と点$A(a\,,b)$との距離になるので、高さ$h=\frac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これより三角形AQPの面積$S=\frac{2\sqrt{(b^2-a^2+1)(a^2+b^2)}}{b^2-a^2}\cdot\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{2}$

$$=\frac{(b^2-a^2+1)\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$$

次に、(2) から$S=\frac{(b^2-a^2+1)\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$、この最小値を求めるので、やはり$b^2-a^2$を一つの文字で置き換えての関数を考えようと思うが、何か不都合な点がないか不安になる。(1)から$b^2-a^2>0$ なので、その条件は付くが、その他に隠れた条件があるのではないか、a、b の実数条件からb^2-a^2 に影響を与えないか、などを考えてみるが、どうやってもそのような条件はなさそうである。最後の最後まで直球勝負の問題であり、教科書内容を確実に理解しておけば$\boxed{1}$は解ける問題だと思う。

(3)の解法　(2)の面積において、$b^2-a^2=x$ とおくと

$S(x)=\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x}=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x}$、$x>0$　この関数をxで微分すると

$$S'(x)=\frac{\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}x-(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{3x\sqrt{x+1}-2(x+1)\sqrt{x+1}}{2x^2}=\frac{(x-2)\sqrt{x+1}}{2x^2}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$		$-$	0	$+$
$S(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

この増減表より $x=2$ のとき、最小値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

よって、最小値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　このときのa、b の条件は、$b^2-a^2=2$

ここで教科書の内容を抜粋する。この他に分数関数での微分を使用しているが割愛する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅲ」（数研出版）の抜粋－－－－－－

双曲線の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$

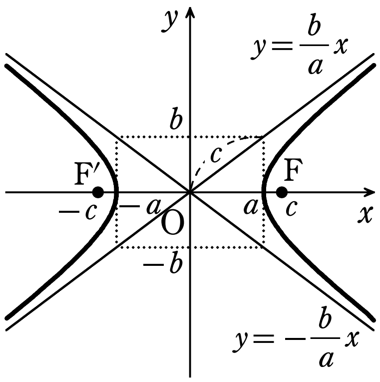
1　焦点は $\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$

2　中心は原点 O，頂点は 2 点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$

3　漸近線は，2 直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

4　双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$

5　双曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称



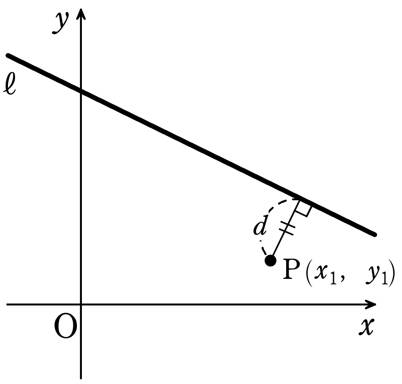
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－以上「数学Ⅲ」からの抜粋－－－－－－－－

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－「数学Ⅱ」（数研出版）の抜粋－－－－－－

点と直線の距離

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－以上「数学Ⅱ」からの抜粋－－－－－－－－

$\boxed{2}$ 3つの数 2，m^2+1，m^4+1 が相異なる素数となる正の整数 m が1つ固定されているものとする。以下の問に答えよ。

(1) 3つの数 2，m^2+1，m^4+1 のうち，1つを a とし，残りの2つを b，c とする。このとき $a^2<bc$ となる a をすべて求めよ。

(2) 正の整数 x，y が $(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)$ をみたしているとき x，y を求めよ。

この問題は一読しただけでは、何を言っているのか皆目見当も付かなかった。

２、m^2+1、m^4+1 のうち１つを a とする、と言いながら、a をすべて求めよ、とは果たして何を言っているのだろうか。これを学校の定期考査で出題したら、生徒たちのブーイングの山が目に浮かぶ。Excellentな高校生ほど、不平不満を直接言ってくるように思う。これを、普通の高校生にも分かるように問題を変えたら、次のようになるだろう。

「３つの数 ２、m^2+1、m^4+1のうち、１つをaと対応させ、残りの２つをb、c に対応させる。このとき、$a^2<bc$ となるa に対応するのは２、m^2+1、m^4+1 のうちどれか。ただし、一つとは限らない。」　となるだろう。

(1)の解法

m^2+1とm^4+1が素数なので、m は偶数となる。

ここで３つの数 ２、m^2+1、m^4+1 のうち１つをa とするので、次の場合分けをする。

(ｉ) $a=2$ のとき

$bc=(m^2+1)(m^4+1)$ となり、m は２より大きい整数なので、$a^2<bc$ は明らか。

(ⅱ) $a=m^2+1$ のとき

$bc=2(m^4+1)$ となり、$bc-a^2=2(m^4+1)-(m^2+1)^2=m^4-2m^2+1=(m^2-1)^2>0$

よって、$a^2<bc$ は成り立つ。

(ⅲ) $a=m^4+1$ のとき

$bc=2(m^2+1)$ となり、$bc-a^2=2(m^2+1)-(m^4+1)^2=-m^8-2m^4+2m^2+1$

$=-m^8-2m^4+2m^2+1=-(m^8+2m^4-2m^2-1)=-(m^2-1)(m^6+m^4+3m^2+1)$

これはmは２より大きい整数なので、負になる。すなわち $a^2<bc$ は成り立たない。

(ｉ)～(ⅲ)より　$a^2<bc$ となるa は、２または m^2+1 である。

次の (2) も捉えどころのない問題である。左辺が$x+y$ とx^2+2y^2+2xy の積であるが、右辺は３つの積であり、これを左辺の２つを右辺の３つに振り分けるとき、単に場合分けでするのか、それともExcellentなやり方があるのか、と考えてしまう。x^2+2y^2+2xy $=x^2+2xy+y^2+y^2=(x+y)^2+y^2$ なので、これを利用できないかな、などと思うが、場合分けは高々３通りチェックするだけということに気づいたら、「下手の考え休むに似たり」ということで考えてもしょうがない、無粋に解いてみよう、と思った。

(2) の解法

与式：$(x+y)(x^2+2y^2+2xy)=2(m^2+1)(m^4+1)\cdots\cdots(A)$の左辺について、まず$x+y$ と x^2+2y^2+2xy の大小を考える。

$$
\begin{aligned}
(x^2+2y^2+2xy)-(x+y) &= (x+y)^2-(x+y)+y^2 \\
&= (x+y)^2-(x+y)+y^2 \\
&= \left(x+y-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}>0 \quad [\because y\text{は正の整数}]
\end{aligned}
$$

これより左辺の因数の大小は、$x^2+2y^2+2xy>x+y\cdots\cdots(B)$ となる。

次に(A)の右辺について考える。左辺と比較するために、右辺を２つの積に分けると、$2(m^2+1)$ とm^4+1 または$2(m^4+1)$ とm^2+1 または2と$(m^4+1)(m^2+1)$　の３通りである。

（ｉ）2と$(m^4+1)(m^2+1)$のとき

$2<(m^4+1)(m^2+1)$なので、左辺の因数と比較すると、$x+y=2$ 、すなわち、$x=1$, $y=1$ となり、このとき$x^2+2y^2+2xy=5$ となって、このようなm の値は存在しない。よって、不適である。

（ⅱ）$2(m^2+1)$ とm^4+1 のとき

$m^4+1-2(m^2+1)=(m^2-1)^2-2>0$ $[\because m\geqq 2]$ となって、$m^4+1>2(m^2+1)$

ここで、左辺の因数と比較すると、(B)より$\begin{cases} x+y=2(m^2+1)\cdots\cdots① \\ x^2+2y^2+2xy=m^4+1\cdots\cdots② \end{cases}$ となる。

②より$(x+y)^2+y^2=m^4+1$ これに①を代入すると、

$4(m^2+1)^2+y^2=m^4+1$、$y^2=-3m^4-8m^2-3<0$ となり、このような正の整数y は存在しないので不適である。

（ⅲ）$2(m^4+1)$ とm^2+1 のとき

$2(m^4+1)-(m^2+1)=m^2(2m^2-1)+1>0$ となって、$2(m^4+1)>m^2+1$

ここで、左辺の因数と比較すると、(B)より$\begin{cases} x+y=m^2+1\cdots\cdots① \\ x^2+2y^2+2xy=2(m^4+1)\cdots\cdots② \end{cases}$ となる。

②より$(x+y)^2+y^2=2(m^4+1)$ これに①を代入すると、

$(m^2+1)^2+y^2=2(m^4+1)$、$y^2=m^4-2m^2+1=(m^2-1)^2$

y は正の整数なので $y=m^2-1$ これを①に代入すると $x=2$ これは適する。

（ｉ）〜（ⅲ）より

$x=2$、$y=m^2-1$ となる。

※この問題は、結局何を訊いているのかが分からない、と感じる受験生が多いだろう。数学的な読解力を試すような問題なのだろうが、いまいちピントこない。でも、この解いた答えに何か重要な意味があり、現代数学のホットな話題の一つに繋がるんだ、と言われたとしたら、へぇ～そうなんだ、と思うが、浅学菲才の私には皆目分からない。分からない人にとっては、解き終わった後の達成感もない。ここｓｗ、せっかくだからPythonを使って、m^2+1とm^4+1が素数になるmの値を10000まで求めてみる。

［出力結果］

2 4 6 16 20 24 54 56 74 90 160 180 204 210 340 430 436 466 556 584 690 760 930 936 966 986 1144 1150 1246 1406 1434 1586 1644 1700 1824 1850 1870 1910 2074 2126 2224 2260 2266 2336 2360 2536 2604 2646 2676 2700 2736 2770 2804 2834 2876 2964 3046 3094 3246 3254 3326 3390 3480 3516 3530 3644 3756 3764 3870 3910 4006 4046 4080 4170 4340 4444 4474 4566 4590 4604 4716 4936 5014 5044 5054 5086 5256 5304 5360 5566 5586 5834 5876 5930 6140 6266 6314 6540 6576 6614 6704 6786 6970 6980 7016 7364 7384 7504 7524 7604 7656 7806 7944 7946 8034 8184 8324 8420 8550 8554 8584 8626 8786 8790 8846 8854 8964 9270 9276 9336 9406 9424 9666

特別、面白い結果ではないが、10000までの数の２以外の一の位には、２と８が現れない、ということぐらいであろうか（その後30000まで調べてみたが、現れなかった）……それがもし全てがそうならば、整数論を専門にする人にはなかなか面白い話しになるのでは、と思うがその真偽は分からない。上記のプログラムを以下に載せる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－Python Program－－－－－－－－－－

```
import math
import sympy

def is_prime(n):
  if n == 1: return False

  for k in range(2, int(math.sqrt(n)) + 1):
    if n % k == 0:
      return False
  return True

for m in range(2,10000,2):
  m1=m**2+1
  m2=m**4+1
  if is_prime(m1) and is_prime(m2):
    print(m," ",end="")
```

－－

3 以下の問に答えよ。

(1) 関数$f(x)$は，区間$0 \leqq x \leqq 2\pi$で第２次導関数$f''(x)$をもち$f''(x) > 0$をみたしているとする。区間$0 \leqq x \leqq \pi$で関数$F(x)$を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$で$F(x) \geqq 0$であることを示せ。

(2) $f(x)$を(1)の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

を示せ。

(3) 関数$g(x)$は，区間$0 \leqq x \leqq 2\pi$で導関数$g'(x)$をもち$g'(x) < 0$をみたしているとする。このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

を示せ。

この問題を読んだときは、単純に微分して、区間$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$で$F(x)$が単調増加になって$F(0)=0$で$F(x) \geqq 0$になるんだろう、という予想で解いてみようとしたが、どんなに頑張っても$F'(x) \geqq 0$にならなかった。ここで、$F(x)$が単調減少になったとしても、$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$となれば、$F(x) \geqq 0$となる、ということに気付くのにかなり時間を費やしてしまった。これが本番の試験ならば、かなり焦ったと思うが、こっちはコーヒーを飲みながらのんびり解いているので、プレッシャーはほとんどなかったが、この方向転換に気付いたときは、ボーとしていた頭が急に活性化され、筆の勢いが上がり、最後まで一気に解いてしまった。解けてしまえばなかなか面白い問題だと思うが、受験生にとっては、限られた時間内に解かなければならないプレッシャーがある中ではかなりの難問であろう。

(1) の解法

$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$ の両辺をxで微分すると

$F'(x) = f'(x) - f'(\pi + x) + f'(\pi - x) - f'(2\pi - x)$

$\quad = \{f'(x) - f'(\pi + x)\} + \{f'(\pi - x) - f'(2\pi - x)\}$

ここで、$f''(x) > 0$ より$f'(x)$は単調増加関数となり、

$x < x + \pi$ より$f'(x) < f(x + \pi)$、$f'(x) - f'(x + \pi) < 0$

また、$\pi - x < 2\pi - x$ より$f'(\pi - x) < f(2\pi - x)$、$f'(\pi - x) - f'(2\pi - x) < 0$

これより、$F'(x) = \{f'(x) - f'(\pi + x)\} + \{f'(\pi - x) - f'(2\pi - x)\} < 0$

すなわち、$F(x)$は単調減少関数となる。

また、$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$\quad = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ なので、

以上より、$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$となる。

※この解法に至るまでには、いろいろな試行錯誤をした。まず$F'(x)$の次に$F''(x)$を求めて、$f''(x) > 0$という条件から、$F''(x) > 0$を導き、$F'(x)$が単調増加になって、それから

$F'(x)>0$、$F(x)$ は単調増加となるのかな、と思っていろいろやってみたが、全て駄目であった。それから一気に方向転換をして、$f''(x)>0$ から$f'(x)$ が増加関数になるというのを利用するのだ、と気付くまでにはかなりの時間を要した。反省としては、$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ という証明は、全て単調増加でする、という固定観念がいけなかったと思う。$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)-f\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(2\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ と気付いた時点でようやく囚われていた観念から解放され、解決へと導いてくれた。

次に(2) を考えるが、(1) の結果を使うのは常道であるが、どのように使うのかに頭を悩ました。最初は部分積分を考えて$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=[f(x)\sin x]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} f'(x)\sin x\,dx$としたが、これ以上の発展はなかった。次に、$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ の x に $\pi-t$、$\pi+t$ 、$2\pi-t$ などと置換してみたが、駄目だった。与式を四分割して、それぞれを(1) の結果に合うように置き換えていく、ということに気付くまで、これもまたかなりの時間を費やしてしまった。

(2) の解法

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\cdots\cdots(A)$$

ここで、$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$において、$x=\pi-t$ とおくと、

$x:\dfrac{\pi}{2}\to\pi$のとき、$t:\dfrac{\pi}{2}\to 0$となり、$-dx=dt$ なので、$dx=(-1)dt$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-t)\cos(\pi-t)(-1)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-t)\cos t\,dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\cos t\,dt$$

よって、$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)\cos x\,dt\cdots\cdots$①

次に、$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$において、$x=\pi+t$ とおくと、

$x:\pi\to\dfrac{3\pi}{2}$のとき、$t:0\to\dfrac{\pi}{2}$となり、$dx=dt$

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+t)\cos(\pi+t)dt=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+t)\cos t\,dt$$

よって、$\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+x)\cos x\,dx$……②

次に、$\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$において、$x=2\pi-t$ とおくと、

$x:\dfrac{3\pi}{2}\to 2\pi$ のとき、$t:\dfrac{\pi}{2}\to 0$となり、$-dx=dt$ なので、$dx=(-1)dt$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi-t)\cos(2\pi-t)(-1)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi-t)\cos t\,dt$$

$$=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-t)\cos t\,dt$$

よって、$\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-x)\cos x\,dt$……③

①、②、③ を(A) に代入すると、

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)\cos x\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+x)\cos x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-x)\cos x\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\cos x-f(\pi-x)\cos x-f(\pi+x)\cos x+f(2\pi-x)\cos x\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)\}\cos x\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx$$

ここで $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき、(1) より$F(x)\geqq 0$ 、さらに $\cos x\geqq 0$なので、$F(x)\cos x\geqq 0$

よって、$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx\geqq 0$

(3) は(2) の流れから、多分似たような流れになると考える。$\cos x$ は、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で正、$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で負、$\pi\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ で負、$\dfrac{3\pi}{2}\leqq x\leqq 2\pi$ で正なので、(2)のような四分割になったと思うが、$\sin x$ は、$0\leqq x\leqq\pi$ で正、$\pi\leqq x\leqq 2\pi$ で負なので、分け方を２分割でいいかな、と予想して解いた。

(3)の解法

(1)と(2)を参考にして、

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} g(x)\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\sin x\,dx\cdots\cdots(A)$$ について考える。

ここで、$\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$ において、$x=2\pi-t$ とおくと、

$x:\pi\to 2\pi$ のとき、$t:\pi\to 0$ となり、$-dx=dt$ なので、$dx=(-1)dt$

$$\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\sin x\,dx=\int_{\pi}^{0} g(2\pi-t)\sin(2\pi-t)(-1)dt=\int_{\pi}^{0} g(2\pi-t)\sin t\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi} g(2\pi-t)\sin t\,dt=-\int_0^{\pi} g(2\pi-x)\sin x\,dx$$

これを(A)に代入すると、

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi} g(x)\sin x\,dx+\int_0^{\pi} g(2\pi-x)\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\{g(x)\sin x-g(2\pi-x)\sin x\}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\{g(x)-g(2\pi-x)\}\sin x\,dx$$

ここで、$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき、$g'(x)<0$ なので、この区間で$g(x)$は単調減少になる。

さらに、$0\leqq x\leqq \pi$ のとき、$x\leqq 2\pi-x$ なので、$g(x)-g(2\pi-x)\geqq 0$

また、$0\leqq x\leqq \pi$ のとき、$\sin x\geqq 0$ なので、$\{g(x)-g(2\pi-x)\}\sin x\geqq 0$

よって、$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi}\{g(x)-g(2\pi-x)\}\sin x\,dx\geqq 0$

この問題で使った公式

定積分の性質

k, l は定数とする。

1 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

2 $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3 $\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}dx=k\int_a^b f(x)dx+l\int_a^b g(x)dx$

4 $\int_a^a f(x)dx=0$　　5 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

6 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

定積分の置換積分法

$\alpha<\beta$ のとき，区間$[\alpha,\ \beta]$で微分可能な関数 $x=g(t)$ に対し，

$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

$\boxed{4}$　2名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i)　正方形の4つの頂点を反時計回りにA，B，C，Dとする。両者はコマを1つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマはA，後攻の持ちゴマはCに置いてあるとする。

(ii)　先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。出た目を3で割った余りが0のときコマは動かさない。また余りが1のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが2のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

(3)　このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち2以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分($k \leqq a < k+1$ となる整数 k)を表す。

この問題は、シンプルな確率の問題のように見えるが、実はとてつもなく難しい問題であった。まず、次のようなアイデアを思い付いたときは、全て解けた、と思ったのだが、甘かった。

「この問題を先攻、後攻として考えるのではなく、後攻の持ち駒を頂点Cに固定させ、先攻の駒だけを移動させ、その駒が頂点Cに来た時をゲーム終了とする。そのとき、n が奇数ならば先攻の勝ちとし、n が偶数ならば後攻の勝ちとすると、問題文の確率 p_n と同じになる。」

(1)の解法

　各頂点への移動は、留まる場合も含めて全て $\dfrac{1}{3}$ である。

　n 回目に駒が頂点A、B、C、Dにくるパターンの回数をそれぞれ a_n、b_n、c_n、d_n とおくと、$p_2 = c_2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$　ここで、$c_2 = b_1 + d_1 = 1 + 1 = 2$ なので、$p_2 = \dfrac{2}{9}$

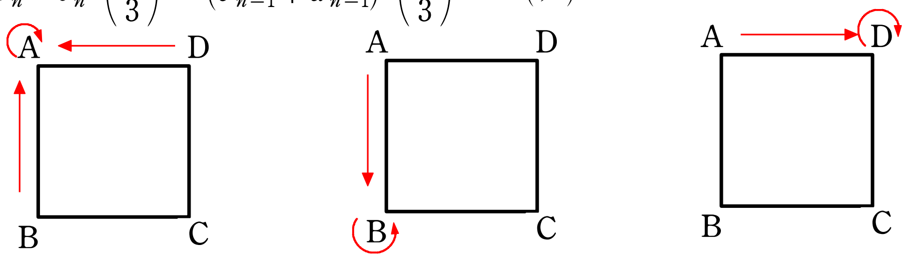
次に、$p_3 = c_3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$　ここで、$c_3 = b_2 + d_2 = a_1 + b_1 + a_1 + d_1 = 4$ なので、$p_3 = \dfrac{4}{27}$

(1) はどうやっても解けると思うが、(2) を考えたときに、問題文通りに求めたら、先攻、後攻に分けて解かねばならず、かなり面倒な式になってしまう。それで、いろいろと考えた末に出たアイデアが、一つの駒だけを動かして、頂点Cに来たら終りとするものである。すると、各頂点に来るパターンがいくつあるのかを調べるだけでよくなり、敵の駒が何処にあるのかなどは考える必要がなくなる。それでも、そのパターンを求めるのは簡単なことではなかった。最初は、具体的なパターンを p_4 と p_5 まで求めて、どのような規則があるのかを考えた。頂点Cに行くには、頂点Aまたは頂点Dからの２通りで、ゲームを終了する一歩前には必ず頂点Aまたは頂点Dにいる。さらに、頂点Aは頂点Dからと頂点B、さらに自分自身に留まる３通りがあり、頂点Bは頂点Aからと自分自身に留まる２通り、同

様に、頂点Ｄも頂点Ａからと自分自身に留まる２通りである。そこら辺からこれらを漸化式にして、それを解いてみよう、と思った。

(2) の解法

$p_n=c_n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=(b_{n-1}+d_{n-1})\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$……(ア)



$a_{n+1}=a_n+d_n+b_n$　　　$b_{n+1}=a_n+b_n$　　　$d_{n+1}=a_n+d_n$

$a_{n+1}=a_n+d_n+b_n$……①、$b_{n+1}=a_n+b_n$……②、$d_{n+1}=a_n+d_n$……③

②と③より $b_n=d_n$ 、これを①に代入すると $a_{n+1}=a_n+2b_n$

さらに②より $a_n=b_{n+1}-b_n$、$a_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$ なので、これらを代入すると

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n+2b_n$

$b_{n+2}-2b_{n+1}-b_n=0$

ここで特性方程式 $x^2-2x-1=0$ を考える。これを解くと $x=1\pm\sqrt{2}$

これより、$b_{n+2}-(1-\sqrt{2})b_{n+1}=(1+\sqrt{2})\{b_{n+1}-(1-\sqrt{2})b_n\}$ と式変形ができ、

数列 $\{b_{n+1}-(1-\sqrt{2})b_n\}$ は初項 $b_2-(1-\sqrt{2})b_1=2-(1-\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$

公比 $(1+\sqrt{2})$ の等比数列なので、$b_{n+1}-(1-\sqrt{2})b_n=(1+\sqrt{2})^n$……④

さらに、$b_{n+2}-(1+\sqrt{2})b_{n+1}=(1-\sqrt{2})\{b_{n+1}-(1+\sqrt{2})b_n\}$ と式変形ができ、

数列 $\{b_{n+1}-(1+\sqrt{2})b_n\}$ は初項 $b_2-(1+\sqrt{2})b_1=2-(1+\sqrt{2})=1-\sqrt{2}$

公比 $(1-\sqrt{2})$ の等比数列なので、$b_{n+1}-(1+\sqrt{2})b_n=(1-\sqrt{2})^n$……⑤

④－⑤

$2\sqrt{2}\,b_n=(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n$、$b_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$、ここで $b_n=d_n$ なので

$d_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$、これより $b_{n-1}+d_{n-1}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$

これを(ア)に代入すると　$p_n=\left\{\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}\right\}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となり、

これを式変形すると、

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{3^n}\right\}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{\frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{3^{n-1}}\right\}$$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となる。

※これが正しいのかどうか、また、式変形をこれで終わっていいのかどうか、非常に迷う。

まず、$b_{n-1}+d_{n-1}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$ が整数になるかどうか確認しなければならず、この式変形がシンプルな形になりそうな気がする。

$$b_{n-1}+d_{n-1}=\frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$$

ここで、$(1+\sqrt{2})^{n-1}=1+{}_{n-1}C_1\sqrt{2}+{}_{n-1}C_2\sqrt{2}^{\,2}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\sqrt{2}^{\,n-1}$

$(1-\sqrt{2})^{n-1}=1+{}_{n-1}C_1(-\sqrt{2})+{}_{n-1}C_2(-\sqrt{2})^2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}(-\sqrt{2})^{n-1}$

$n-1$ が奇数 すなわち n が偶数のとき

$$\begin{aligned}b_{n-1}+d_{n-1}&=\frac{2\left({}_{n-1}C_1\sqrt{2}+{}_{n-1}C_3\sqrt{2}^{\,3}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\sqrt{2}^{\,n-1}\right)}{\sqrt{2}}\\&=2\left({}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_3\cdot 2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}2^{\frac{n-2}{2}}\right)\\&={}_{n-1}C_1\cdot 2+{}_{n-1}C_3\cdot 2^2+{}_{n-1}C_5\cdot 2^3+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\\&=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}{}_{n-1}C_{2k-1}2^k\end{aligned}$$

ここで、n が偶数なので、$n=2l\left(l=1,2,3,\cdots,\dfrac{n}{2}\right)$ とおくと

$b_{n-1}+d_{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{l}{}_{n-1}C_{2k-1}\cdot 2^k\cdots\cdots(A)$ これは整数になる。

$n-1$ が偶数 すなわち n が奇数のとき

$$\begin{aligned}b_{n-1}+d_{n-1}&=\frac{2\left({}_{n-1}C_1\sqrt{2}+{}_{n-1}C_3\sqrt{2}^{\,3}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}\sqrt{2}^{\,n-2}\right)}{\sqrt{2}}\\&=2\left({}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_3\cdot 2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}2^{\frac{n-3}{2}}\right)\\&={}_{n-1}C_1\cdot 2+{}_{n-1}C_3\cdot 2^2+{}_{n-1}C_5\cdot 2^3+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\\&=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{n-1}C_{2k-1}2^k\end{aligned}$$

ここで、n が奇数なので、$n=2l-1\left(l=1,2,3,\cdots,\dfrac{n+1}{2}\right)$ とおくと

$b_{n-1}+d_{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{l-1}{}_{n-1}C_{2k-1}\cdot 2^k\cdots\cdots(B)$ これも整数になる。

ここで、(A)と(B)を一つにして、$p_n=(b_{n-1}+d_{n-1})\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{n-1}C_{2k-1}\cdot 2^k\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となるが、これが使い勝手が良い形とは思わない。

よって、$p_n=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$ を答の形にした。

(3) $\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$ をNが偶数、奇数に場合分けをして証明する。

（ｉ）N が偶数すなわち$N=2l$ $(l=1,2,3,\cdots)$ のとき

$\left[\dfrac{N+1}{2}\right]=l$ より　左辺$=\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1}=p_1+p_3+p_5+\cdots\cdots+p_{2l-1}$

$\left[\dfrac{N}{2}\right]=l$ より　右辺$=\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}=p_2+p_4+p_6+\cdots\cdots+p_{2l}$

ここで(2)の答えの中の$\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$、$\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$ をそれぞれ α、β とおくと

$$p_n=\frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{6}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$$

これより $p_{2l}-p_{2l+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}(\alpha^{2l-1}-\beta^{2l-1})-\dfrac{\sqrt{2}}{6}(\alpha^{2l}-\beta^{2l})$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\{\alpha^{2l-1}(1-\alpha)-\beta^{2l-1}(1-\beta)\}\cdots\cdots①$$

ここで、$\beta<0$ なので$-\beta^{2l-1}(1-\beta)>0$

また、$0<\alpha<1$ なので、$\alpha^{2l-1}(1-\alpha)>0$

よって、①は正となり、$p_{2l}>p_{2l+1}$

すなわち、$p_2>p_3$

$p_4>p_5$

$p_6>p_7$

$\cdots$

$p_{2l-2}>p_{2l-1}$

$p_{2l}>p_{2l+1}$

これらの辺々を加えると、$p_2+p_4+p_6+\cdots\cdots+p_{2l}>p_3+p_5+p_7+\cdots\cdots+p_{2l-1}+p_{2l+1}$

$>p_3+p_5+p_7+\cdots\cdots+p_{2l-1}$

ここで、$p_1=0$ なので　　$p_2+p_4+p_6+\cdots\cdots+p_{2l}>p_1+p_3+p_5+p_7+\cdots\cdots+p_{2l-1}$

すなわち　$p_1+p_3+p_5+p_7+\cdots\cdots+p_{2l-1}<p_2+p_4+p_6+\cdots\cdots+p_{2l}$

よって、与式は成り立つ。

（ⅱ）N が奇数すなわち$N=2l+1$ $(l=1,2,3,\cdots)$ のとき

$\left[\dfrac{N+1}{2}\right]=l+1$ より　左辺$=\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1}=p_1+p_3+p_5+\cdots\cdots+p_{2l+1}$

$\left[\dfrac{N}{2}\right]=l$ より　右辺$=\sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}=p_2+p_4+p_6+\cdots\cdots+p_{2l}$

（ｉ）と同様にして

$$p_2 > p_3$$
$$p_4 > p_5$$
$$p_6 > p_7$$
$$\cdots$$
$$p_{2l} > p_{2l+1}$$

これらの辺々を加えると、$p_2 + p_4 + p_6 + \cdots\cdots + p_{2l} > p_3 + p_5 + p_7 + \cdots\cdots + p_{2l+1}$

ここで、$p_1 = 0$ なので　　$p_2 + p_4 + p_6 + \cdots\cdots + p_{2l} > p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + \cdots\cdots + p_{2l+1}$

すなわち　$p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + \cdots\cdots + p_{2l+1} < p_2 + p_4 + p_6 + \cdots\cdots + p_{2l}$

よって、与式は成り立つ。

※正直、(3) は自力では解けなかった。多分、p_n は単調減少関数なのだと思うが、その証明自体が非常に困難を極める。要するに、上記の解法にあるように

$p_n = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$ の β は負の数であり、これを n の関数とみなして、微分して単調減少を示そうかとも思ったが、n を奇数、偶数と場合分けをせねばならず、さらに、偶数から奇数、奇数から偶数への橋渡しをせねばならず、かなり面倒である。それで、漸化式から $p_n > p_{n+1}$ を導き出そうと思ったが、これもいろいろな壁に阻まれてしまった。数学的帰納法を使ったとしても、最終的には $p_n > p_{n+1}$ を導き出さなければならず、力ずくで p_n を微分しようかな、と思ったが、どうもやる気がしなかった。

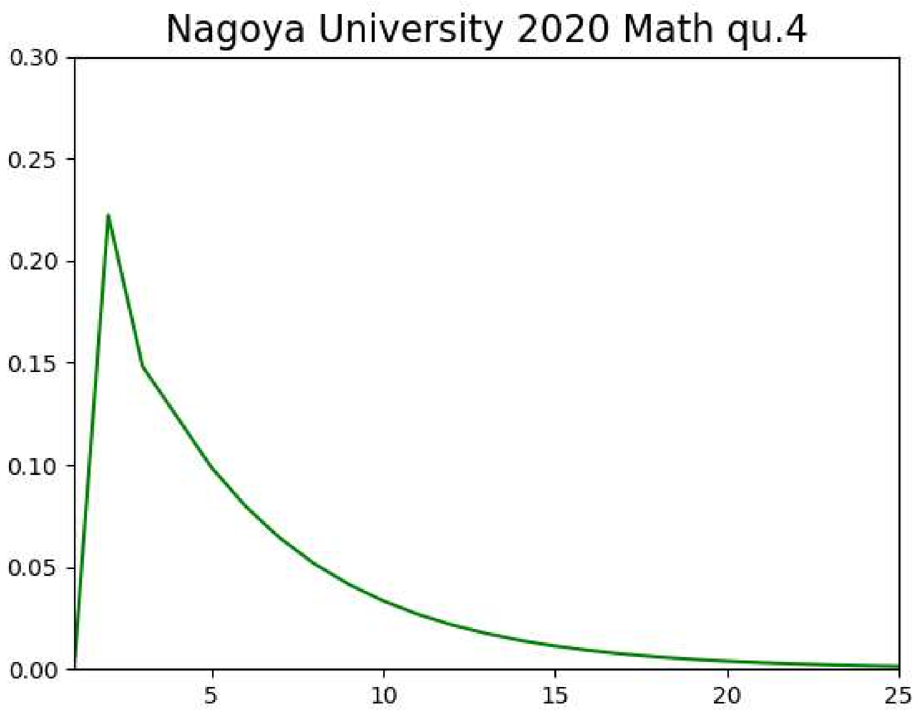
上記にある $p_{2l} > p_{2l+1}$ の関係だけで全てを証明しようというアイデアは、大手予備校の代々木ゼミナールの解答速報を拝借したものである。いろいろな予備校のサイトを見たが、代々木ゼミナールの解法が最高であった。老体に鞭を打って考えあぐね、最後には投げ出そうかな、と思ってた矢先にこの解法を見て、まさに地獄に一条の蜘蛛の糸を見るような気になって、本当にうなってしまった。これを解いた人は誰なのか非常に気になるが、この場を借りて心から感謝したい。ありがとうございました。最後に、ちょっと悔しいので、Pythonを使って p_n のグラフを描いて終わりにする。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－Python Program－－－－－－－－－－

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.set_title(”Nagoya University 2020 Math qu.4”, fontsize = 16)
ax.set_xlim(1,25)
```

```
ax.set_ylim(0,0.3)
ax.grid(which="major",axis="n",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",linewidth=1)
ax.grid(which="major",axis="pn",color="blue",alpha=0.8,linestyle="--",linewidth=1)
n = np.arange(1, 26, 1)
a=(1+math.sqrt(2))/3
b=(1-math.sqrt(2))/3
pn =math.sqrt(2)/6*(a**(n-1)-b**(n-1))
ax.plot(n, pn, color = "green")
plt.show()
```

－－



上図は$p_n=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}\right\}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots,25)$ のグラフで、縦軸がp_n、横軸がn であり、各点を直線で結んでいる。このグラフを見てもp_n は$n \geqq 2$ で単調減少になっており、$p_n > p_{n+1}$ $(n \geqq 2)$ であるが、漸化式の関係を使って証明できそうな気が今でもしているが、取りあえず、Python のグラフを表示して、名古屋大学前期数学（理系）の解説は終わりにする。