２０２０年度　九州大学　数学（理）
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

九州大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに５題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

〔１〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{27}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

点 $(a, 0)$ を通り，曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

この問題は、まさに数学Ⅲの王道の問題、あえて言えば何のひねりもなさそうな問題のように見える。しかし、何らかの落とし穴があるのでは、と注意しながら解いてみる。

点$(a, 0)$から、曲線$y = e^{-x} - e^{-2x}$ への接線の方程式の求め方は教科書レベルである。

まず、曲線上の接点$(t, e^{-t} - e^{-2t})$ とおく。その接線の傾きは、元の関数を微分した導関数$y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$から、傾き $-e^{-t} + 2e^{-2t}$ となり、接点$(t, e^{-t} - e^{-2t})$ を通るので、

$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$となる。下の公式を参照。

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は　$y - y_1 = m(x - x_1)$

さらに、この直線が点$(a, 0)$ を通るので、$0 - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$

両辺に e^{2t} を掛けると、$-e^{2t}(e^{-t}-e^{-2t})=e^{2t}(-e^{-t}+2e^{-2t})(a-t)$

$$-(e^{2t}e^{-t}-e^{2t}e^{-2t})=(-e^{2t}e^{-t}+2e^{2t}e^{-2t})(a-t)$$

$$-(e^{t}-1)=(-e^{t}+2)(a-t)\cdots\cdots①$$

となり見やすくなる。では、これをどうするかを考えなければならない。

問題を読んでみると、a の値に対して接点が存在するか、すなわち実数t が存在するか、という問いかけになる。ここで、数学Ⅲ（数研出版）の教科書の抜粋を示す。

−−−

応用例題

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$\frac{e^x}{x}=a$$

解 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

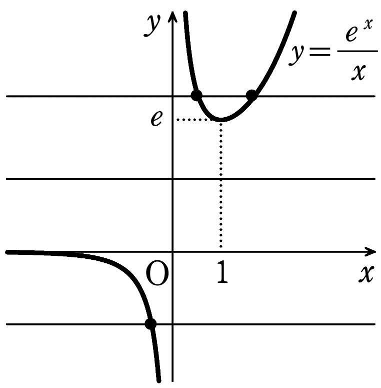
$f'(x)=0$ となる x は

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	極小 e	↗

$x=1$ であるから，$f(x)$ の増減表は上のようになる。また

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点を考えて，求める実数解の個数は，次のようになる。

$a>e$ のとき　2 個

$a=e$，$a<0$ のとき　1 個

$0\leqq a<e$ のとき　0 個

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−「数学Ⅲ（数研出版）」からの抜粋−−

これを思い出したなら①の式変形は以下のようになる。

$$\frac{-e^t+1}{-e^t+2}=a-t、\qquad t+\frac{e^t-1}{e^t-2}=a、\qquad t+1+\frac{1}{e^t-2}=a$$

ここで$f(t)=t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$ とおくと、$\begin{cases} f(t)=t+1+\dfrac{1}{e^t-2} & \cdots\cdots① \\ y=a & \cdots\cdots② \end{cases}$

①＝②とは、①のグラフと②のグラフの共有点が存在するa の値の範囲が求める答えになる。まず、$y=f(t)$のグラフを描く。$f'(t)=1+\dfrac{-e^t}{(e^t-2)^2}=\dfrac{(e^t-2)^2-e^t}{(e^t-2)^2}$

$$f'(t)=\frac{e^{2t}-5e^{t}+4}{(e^{t}-2)^2}=\frac{(e^{t}-4)(e^{t}-1)}{(e^{t}-2)^2}$$

$f'(t)=0$ とおくと、$e^{t}=4$ または $e^{t}=1$

すなわち　$t=\log 4$ または $t=0$

増減表は

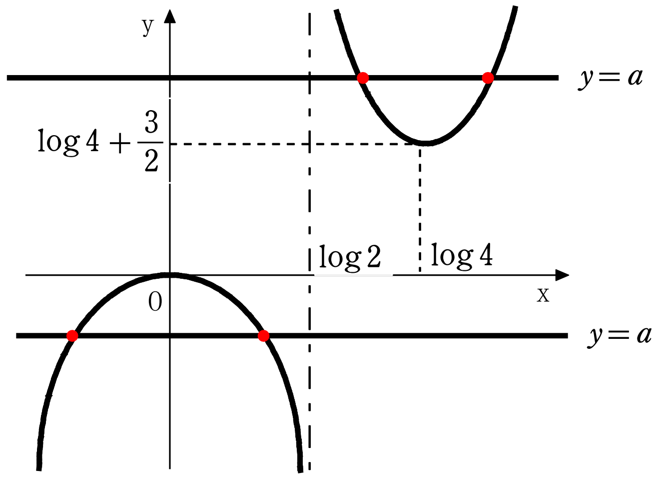
t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$\log 4$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

極大値 $f(0)=1+\frac{1}{1-2}=0$　極小値 $f(\log 4)=\log 4+1+\frac{1}{4-2}=\log 4+\frac{3}{2}$

$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=-\infty$　$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=\infty$

$\lim_{t\to\log 2-0}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=\log 2+1+\frac{1}{2e^{-0}-2}=-\infty$

$\lim_{t\to\log 2+0}\left(t+1+\frac{1}{e^{t}-2}\right)=\log 2+1+\frac{1}{2e^{+0}-2}=\infty$



上図から、求める答え　$a\leqq 0$，$\log 4+\frac{3}{2}\leqq a$

※解き終わって、何の落とし穴もなく、むしろ正解なのかどうか不安になってしまう。あえて言えば、$t=\log 2$ で不連続になる、ということに気付くかどうか、だと思うが、それも教科書レベルの内容であろう。とにかく、数学Ⅲの教科書を一通り終えた後に、総復習の問題として最適な問題である。

〔 2 〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{28}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

a, b, c, d を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) c, d を a, b を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

（1）は、そのままxに$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$を代入して、$\boxed{\ ①\ }+\boxed{\ ②\ }i=0$ とまとめ、

連立方程式$\begin{cases} ①=0 \\ ②=0 \end{cases}$として、さらに、$a$、$b$ を定数として、c 、d を求めたらよい、とすぐに気付くと思う。しかし、そのまま代入しても芸がなさそうなので、$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$を解にする２次方程式を作ってみる。$x=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$、$2x-1=\sqrt{3}\,i$ として両辺を平方する。

$(2x-1)^2=-3$ 、これを展開してまとめると、$x^2-x+1=0$ となる。

$x^2=x-1$ として$f(x)$ を式変形すると、

$$f(x)=(x-1)^2+ax(x-1)+b(x-1)+cx+d=x^2-2x+1+ax^2-ax+bx-b$$
$$=(x-1)-2x+1+a(x-1)-ax+bx-b=(b+c-1)x-a-b+d$$

これより、$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)=(b+c-1)\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)-a-b+d$

$$=\frac{-2a-b+c+2d-1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,(b+c-1)}{2}i$$

ここで、$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)=0$、さらに$\underline{\underline{\dfrac{-2a-b+c+2d-1}{2}と\dfrac{\sqrt{3}\,(b+c-1)}{2}}}$は実数なので

$\begin{cases} -2a-b+c+2d-1=0 \cdots\cdots ① \\ b+c-1=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$となる。

この言葉がないと減点されるのではないか、と思うが……実際の採点基準を知らないので分からない。

②より$c=-b+1$、

これを①に代入してまとめると、$d=a+b$

よって、$c=-b+1$、$d=a+b$ となる。

（２）は、捉え所のない問題である。とりあえず（１）の答えを$f(x)$に代入してみる。
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+(-b+1)x+a+b$ となり、$f(1)=2a+b+2$、$f(-1)=3b$ である。
問題文どおり式を立ててみると、
$2a+b+2=7Q_1+1$、$2a+b+2=11Q_2+10$、$3b=7Q_3+3$、$3b=11Q_4+10$ となる。
これを整数問題として解くのかな、と最初は思ったが、a、b の絶対値が40以下、という条件を見て、高々80個の整数を調べるだけか、と言うことで、取りあえずそのような数を探してみる。
まずは、$3b=7Q_3+3$ から、$3b-3=7Q_3$、$3(b-1)=7Q_3$ となり、$b-1$が7の倍数になる。
b は-34、-27、-20、-13、-6、1、8、15、22、29、36 の11個である。
さらに、$3b=11Q_4+10$ から、$3b-21=11Q_4-11$、$3(b-7)=11(Q_4-1)$ となり、$b-7$が11の倍数になる。上の11個の中では$b=29$ だけである。この$b=29$ を次の式に代入する。
$2a+b+2=7Q_1+1$ から $2a+31=7Q_1+1$、$2(a+15)=7Q_1$ となり、$a+15$ が7の倍数となる。a は-36、-29、-22、-15、-8、-1、6、13、20、27、34 の11個である。
さらに、$2a+b+2=11Q_2+10$から$2a+31=11Q_2+10$、$2(a+16)=11(Q_2+1)$ となり、$a+16$ が11の倍数となる。上の11個の中では $a=6$ だけである。
これより、$a=6$ 、$b=29$ を$f(x)$ に代入すると、$f(x)=x^4+6x^3+29x^2-28x+35$となる。
$f(x)=0$ の解なので、$x^4+6x^3+29x^2-28x+35=0$ を解く。
（１）から、左辺はx^2-x+1 で割り切れる。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+7x+35 \\
\hline
x^2-x+1 & x^4+6x^3+29x^2-28x+35 \\
 & x^4-x^3+x^2 \\
\hline
 & 7x^3+28x^2 \\
 & 7x^3-7x^2+7x \\
\hline
 & 35x^2-35x+35 \\
 & 35x^2-35x+35 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

これより、$(x^2-x+1)(x^2+7x+35)=0$ となり、$f(x)=0$ のすべての解は

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}、\frac{-7\pm\sqrt{91}\,i}{2}\ \text{となる。}$$

※この問題は果たして何の分野なのだろうか。方程式、と言っても２次方程式の解の公式を使ったぐらいである。複素数の相等なのかな、としても、大したものを使っていない。では、整数の分野、なのだろうか。基本的に８０個の整数をチェックすれば答えが出てくるので、整数の分野の問題としては、それほど面白いとは思わない。要するに、いろんな材料を使って煮込んだ、ごった煮みたいな問題なのだろう。１本筋の通った料理とは違ったごった煮の料理。これは料理じゃない、と言う人もいるが、それはそれで楽しく食べられると思う。しかし、後で何を食べたのかが分からないのが難点だろう。

ここで、「a、b の絶対値が40 以下」を「a、b の絶対値が80 以下」としたら、a、b の値は何通りあるのか、興味があるので、Python でプログラミングをして調べてみる。

［Python のプログラム］

```
import sympy
t=80
for b in range(-t,t+1):
  r1=(3*b)%7
  r2=(3*b)%11
  if r1==3 and r2==10:
    for a in range(-t,t+1):
      r3=(2*a+b+2)%7
      r4=(2*a+b+2)%11
      if r3==1 and r4==10:
        print("答えはa={0}、b={1}です".format(a,b))
```

［出力結果］

```
答えはa=-71、b=-48です
答えはa=6、b=-48です
答えはa=-71、b=29です
答えはa=6、b=29です
```

今度は「a、b の絶対値が160 以下」としてみる。つまり、上のプログラムt=160として、さらに出力の箇所をprint("(a,b)=({0}、{1})、".format(a,b),end="")とする。

［出力結果］

```
(a,b)=(-148、-125)、(a,b)=(-71、-125)、(a,b)=(6、-125)、
(a,b)=(83、-125)、(a,b)=(160、-125)、(a,b)=(-148、-48)、
(a,b)=(-71、-48)、(a,b)=(6、-48)、(a,b)=(83、-48)、
(a,b)=(160、-48)、(a,b)=(-148、29)、(a,b)=(-71、29)、
(a,b)=(6、29)、(a,b)=(83、29)、(a,b)=(160、29)、
(a,b)=(-148、106)、(a,b)=(-71、106)、(a,b)=(6、106)、
(a,b)=(83、106)、(a,b)=(160、106)、
```

20個に増えた。

「a、b の絶対値が40 以下」は1個、「a、b の絶対値が80 以下」は4個、そして「a、b の絶対値が160以下」は20個。さらに調べたら「a、b の絶対値が400以下」は110個であった。コンピュータは数字を変更するだけで、いくらでも調べることができる。だから、興味本位で「a、b の絶対値が800以下」を調べると、441個であった。これから面白そうな規則が浮かび上がりそうであるが、この問題の解説という範疇からはかなり逸れてしまったので、ここまでとしよう。

〔 3 〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{29}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

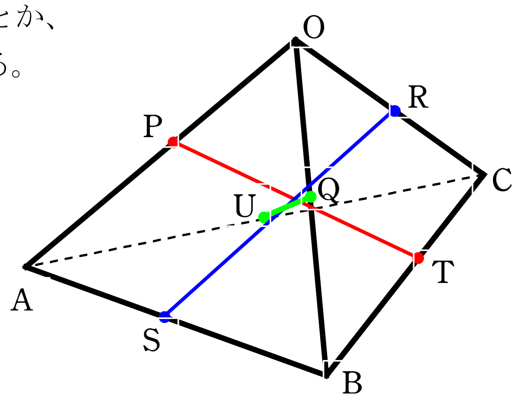
四面体OABCにおいて，辺OAの中点と辺BCの中点を通る直線をℓ，辺OBの中点と辺CAの中点を通る直線をm，辺OCの中点と辺ABの中点を通る直線をnとする。$\ell \perp m$，$m \perp n$，$n \perp \ell$であり，$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=2$のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線OBと直線CAのなす角θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$を求めよ。

(2) 四面体OABCの4つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

まず図を描きながら問題を読むと下のような図になった。辺OAの中点P、辺OBの中点Q、辺OCの中点R、辺ABの中点S、辺BCの中点T、辺CAの中点Uとおく。

この問題はベクトルの分野である。垂直の条件とか、なす角θを求めよ、という文言からの判断である。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}=\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QU}}=\overrightarrow{\mathrm{OU}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}$$

ここで直線l上に$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$、直線$m$上に$\overrightarrow{\mathrm{QU}}$、直線$n$上に$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$があるので、

$l \perp m$ より $\overrightarrow{\mathrm{PT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QU}}=0$、$\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot\dfrac{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{2}=0$、$\dfrac{\{\vec{c}-(\vec{a}-\vec{b})\}\cdot\{\vec{c}+(\vec{a}-\vec{b})\}}{4}=0$

$|\vec{c}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=0$、これより$|\vec{c}|=|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{5}$

$m \perp n$ より $\overrightarrow{\mathrm{QU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=0$、$\dfrac{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}=0$、$\dfrac{\{\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})\}\cdot\{\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})\}}{4}=0$

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}-\vec{c}|^2=0$、これより$|\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{3}$

$n \perp l$ より $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}}=0$、$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}\cdot\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}=0$、$\dfrac{\{\vec{b}-(\vec{a}-\vec{c})\}\cdot\{\vec{b}+(\vec{a}-\vec{c})\}}{4}=0$

$|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2=0$、これより$|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=2$

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$のなす角を$\alpha$とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha$……①

①の左辺$=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

ここで、$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{5}$ なので、$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ 、この両辺を２乗すると

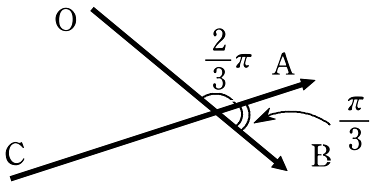
$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$ となり、さらに $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ 、$|\vec{b}|=2$ を代入すると、$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

同様にして、$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{3}$ から、$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ 、$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=2$ から、$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$

これから、①の左辺$=1-3=-2$

また、①の右辺$=2\times2\cos\alpha=4\cos\alpha$

これより $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ となり、$0\leqq\alpha\leqq\pi$ とおくと $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

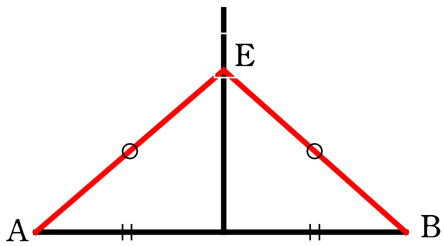


よって、直線OB と 直線CA のなす角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

次に（２）を解いてみよう。これを読んで、四面体の外接球の半径か、と思って、なんか公式なんてあったかな、と思って不安になる人もいるだろう。「三角形の外接円の半径を求めよ」ならば正弦定理というものがあるが、四面体の外接球の半径を求める公式って何かあったかな、とここで考え込んでしまってはいけない。そんな公式は教科書の何処にもない。ちょっと難しめの入試問題の参考書には、球の半径を求めさせるような問題はあるにはあるが、入試本番のときには、頭の中は空っぽになって、そのような問題なんて思い出しもしないだろう。ということは、自分で考え出さなければならない。そこで、冷静になって最初からこの問題を振り返ってみる。そのとき、下のような図が浮かんできたらしめたものである。

つまり、球の中心を点Eとおくと、$EA=EB=EC=EO$ となり、さらにこの点は直線$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$ の交点である、ということに気付いたらこの問題は解ける。

まず点Eは直線$\boldsymbol{l}$ 上の点より、ベクトル方程式から



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+t\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+t\vec{c}}{2}\cdots\cdots①$$

次に直線$\boldsymbol{m}$ 上の点より、同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+s\overrightarrow{\mathrm{QU}}=\frac{1}{2}\vec{b}+s\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{s\vec{a}+(1-s)\vec{b}+s\vec{c}}{2}\cdots\cdots②$$

①＝②で、$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ は一次独立なので、$\begin{cases}\dfrac{1-t}{2}=\dfrac{s}{2}\\[2mm]\dfrac{t}{2}=\dfrac{1-s}{2}\\[2mm]\dfrac{t}{2}=\dfrac{s}{2}\end{cases}$ これらを満足する値は $\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\[2mm]s=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

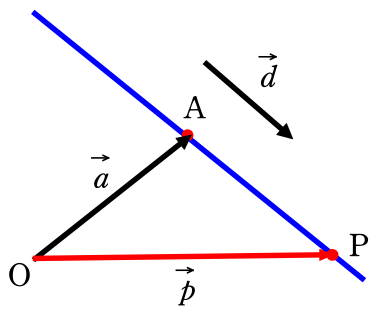
これより、$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ となり、これは $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ も成り立つので、直線$\boldsymbol{n}$ 上

の点でもある。よって、３直線は１点で交わり、その交点Eが四面体の外接球の中心である。求める球の半径は$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$なので、$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2=\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\right|^2$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}}{16}=\frac{3+4+5+2+6+4}{16}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$$

　よって、求める半径$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$である。

※ベクトル方程式の分野を苦手とする高校生が多いと思う。この壁を乗り越えるポイントはベクトル（矢印、数学的には有向線分という）を慣れ親しめられるか、ということに尽きるのでは、と思う。今まで教えた経験上、風の向きと強弱を表すのがベクトルである、としたら、数学を苦手とする高校生でも、なるほど、と理解してくれたような気がする。矢印の長さは、決して距離を表すものではなく、強弱を表し、矢印の向きは、風が吹いている方向を表している。すると、同じ風を測定した場合、向きと大きさが同じならば、同じ風を表しているから、そのような矢印は等しくなる、というように教えた。その後、このベクトル方程式の説明であるが、まずは直線とは何か、を言わなければならない。直線とは、真っ直ぐに吹いている風である。この風には幅がない。どこかを起点にして、単に真っ直ぐ吹いている。風の強弱は関係なく、どっちに吹いているかだけが必要な条件である。つまり、点A を通って、特定の方向（これを方向ベクトル$\vec{d}$とおく）に吹いている風を観測点Pを動点として、その位置ベクトルを点$A(\vec{a})$と方向ベクトル$\vec{d}$を使って表すのが直線のベクトル方程式である、と教えながら、下の図を描く。



すると、$\vec{p}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$となるのはすぐに分かってくれる。次に$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\vec{d}$は平行（ベクトルの平行の概念が小さいときから慣れ親しんだ平行とは違いがある）なので、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{d}$となる実数$t$が存在する。このとき、線分$AP$の長さが$\vec{d}$の２倍なら$t=2$だよ、と教えるのは、私は納得できない。何故なら、ベクトルの長さは大きさである、と最初に教えているのに、ここで長さにしてしまったら、混乱させてしまう気がするからである。ここでは風の観測地点という概念を前面に出して、直線を表すときは風の強さは関係なく、方向だけが必要だから$t\vec{d}$となって、方向ベクトルの大きさのt倍とするんだよ、と教える。これから、直線のベクトル方程式の公式$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$が得られる。この直線のベクトル方程式は、平面上という条件は一切使っていない、ということに気付かせ、空間ベクトルにおいても同じである、という結論に持って行く。その後、EXCELLENTな高校生が多い教室ならば、垂直な直線のベクトル方程式の話しを私はする。そのとき、垂直なベクトル（法線ベクトルという）$\vec{n}$とおくと、$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$となるが、これを満たす観測地点Pは直線なのかどうかを考えさせる。これが平面になることに気付いた生徒は、まさにEXCELLENTな高校生であろう。

〔４〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{30}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

４個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

（１）の問題は、４個のサイコロの出た目の積が25の倍数になるには、５の目が少なくとも２つ以上出ないといけない、というのは誰でも考えつくと思うが、それを余事象で求めるのか、そのまま求めるのか、多少迷ってしまう。そのまま求めるならば、「２個が５の目で残りは５以外の目」、「３個が５の目で残りは５以外の目」、「４個とも５の目」である確率の和である。余事象を使うならば、「５の目が１つも出ない」または「５の目が１つだけ」の確率の和を１から引けばよい。それほど違いはないと思うが、余事象の方が２つだけなので多少楽のようにみえるので余事象を使うことにする。

（ｉ）５の目が１つも出ないとき　$\left(\frac{5}{6}\right)^4$

（ⅱ）５の目が１つだけのとき　${}_4C_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{4}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3$

これらより、求める確率は $\underline{1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^4+\frac{4}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3\right\}=1-\frac{625+500}{1296}=\frac{171}{1296}=\frac{19}{144}}$

（２）の問題は、絶対余事象を使った方が楽であろう。「すべて奇数の目」または「１つだけ４以外の偶数の目が出て残りは奇数の目」の確率の和を１から引く。

（ｉ）すべて奇数の目のとき　$\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{1}{16}$

（ⅱ）１つだけ４以外の偶数の目で残りは奇数の目のとき　${}_4C_1\frac{2}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{6}$

これらより、求める確率は $\underline{1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{11}{48}=\frac{37}{48}}$

（３）の問題は、完全に引っ掛け問題だろう。（１）と（２）の答えを掛けて $\frac{19}{144}\times\frac{37}{48}$ $=\frac{703}{6912}$ とさせよう、というのが見え見えの問題である。$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ が成り立つのは事象AとBがそれぞれ独立の試行ときである。この問題の（１）と（２）は同一

の試行での結果である。さらに、出た目の積が25の倍数という事象と出た目の積が４の倍数という事象は、排反事象でもない。それではどうするか。なんとか（1）と（2）の答えを使えないかな、と考えてみたが、最初から求めるのが一番早いかもしれない、という結論にちょっと時間を掛けて達する。このような回りくどさも家でのんびりとコーヒーでも飲みながら解くから出来るのだろう。本番ならば、最初から求めた方が早い、と咄嗟に気付いて手を動かさなければならない。ということで、積が100になる場合を考える。

（ⅰ）５の目が２個、偶数の目が２個のとき　${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1}{24}$

（ⅱ）５の目が２個、４の目が１個、１、３の目が１個のとき　$\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{54}$

（ⅲ）５の目が３個、４の目が１個のとき　${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{324}$

以上より、求める確率は $\frac{1}{24}+\frac{1}{54}+\frac{1}{324}=\frac{27+12+2}{648}=\frac{41}{648}$

※この問題は、解き終わって、やったー、と言えるような達成感がない。まっ、入試攻略としては、必ず解かなければならない問題のように思う。（3）を（1）と（2）を掛けて答えにする受験生はどのぐらいいたのだろうか。多分、合格者の中ではこの問題を落とす人はいなかったのでは、と思うが実際には分からない。

　独立試行について教えるとき、排反事象における$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$と独立試行における$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$の違いについて説明するのに苦労する。例えば、１個のさいころを投げて、偶数の目が出る事象をA、１または３の目が出る事象をBとおく。$P(A\cup B)$を求めてみよう、と問うと、ほとんどの生徒は$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$と答える。では次に、$P(A\cap B)$を求めてみよう、と問うと、$\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$とする生徒がパラパラいる。その生徒たちに、偶数の目で、かつ、１または３の目というのはありますか、と問うと全員、ない、と答える。つまり$P(A\cap B)=0$であるが、果たして何を間違えたのだろうか、と問いて、明確に答えられる生徒は少ない。これは生徒に問題があるのだろうか。私はそうは思わない。教科書通り教えていると、確率の最初は１回の試行についての問題が数多く出てくる。その後、突如、独立な試行の話しになって、反復試行へと発展していく。つまり、今までは「４個の異なるさいころを１回投げて……」という問題が、突如、「同じさいころを４回投げて……」という問題になる。答えは同じになるが、何が違うのだろうか、というのを考えさせる時間が必要と思うが、なかなかそのような時間は取れない。しかし、「生徒に発見させよう。教え込みはやめよう。」という何でもかんでもアクティブラーニングという今の風潮に私は反対である。まるで、小さい子にお箸を持たせて、好きに使って良いよ、と言っている気がする。弦楽器を前にして、好きに弾いて良いよ、と言っているだけで果たしてその子が音楽を堪能できるのだろうか。やはり、ある程度の基本は教えないといけないと思う。この問題に引っ掛かった受験生は、果たして何人いたのだろうか。

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{31}$ の定められた場所に記入しなさい。

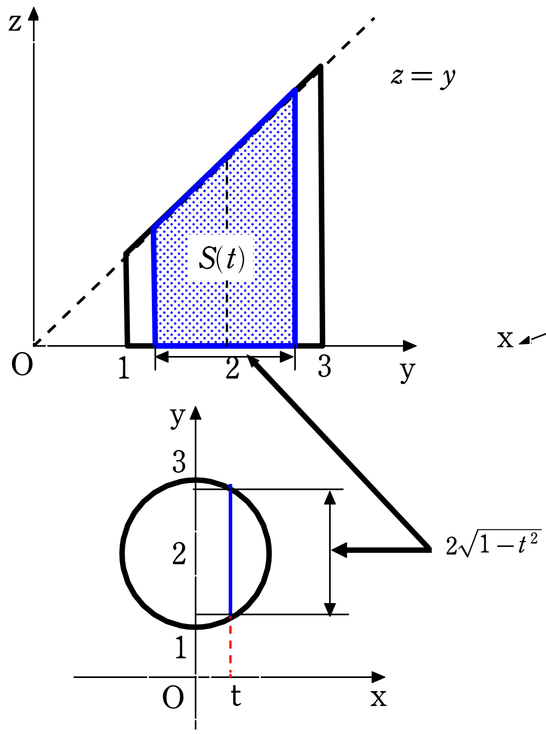
［問題］

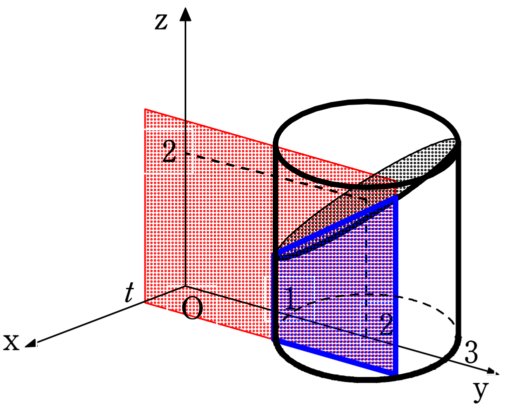
座標空間において，中心 $(0,2,0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱（内部を含む）を E とする。点 $(0,2,2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x=t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

（1）の問題を読んで図に描いたら、下図のようになった。





これらの図から、

$S(t)=2\cdot 2\sqrt{1-t^2}=4\sqrt{1-t^2}$

次に、T の体積を V_1 とおくと、

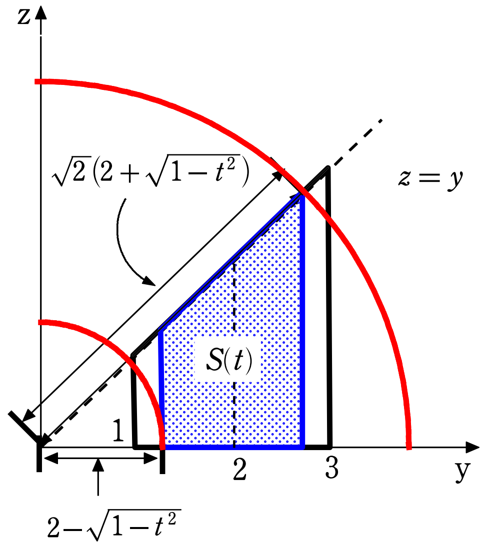
$V_1=\int_{-1}^{1} S(t)dt=\int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-t^2}\,dt$ となり、

$t=\sin\theta$ とおくと、$dt=\cos\theta\,d\theta$、$t:-1\longrightarrow 1$ のとき、$\theta:-\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ なので、

$$V_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$=\left[\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$　　　よって、$\underline{S(t)=4\sqrt{1-t^2}}$、$\underline{T\text{の体積}=2\pi}$

（２）を考えるとき、回転体の基本は、回転する軸に垂直な面で切り、その断面図を考える。さらに、回転体は円の連続体になるので、回転軸から一番遠いところが、外側の曲面の半径であり、一番近いところが、内側の曲面の半径である。それらの基本を頭に入れておけば、この問題はさほど難しくない。ただ、回転した立体の概形図を描こうとするとかなり難しい。概形図が描けなくても答えは出せる、という開き直りが出来るかどうか、がこの問題を解けるかどうかの分かれ道であろう。



図より、求める立体の体積をV_2とおくと、

$$V_2=\pi\int_{-1}^{1}\{\sqrt{2}(2+\sqrt{1-t^2})\}^2dt-\pi\int_{-1}^{1}(2-\sqrt{1-t^2})^2dt$$

$$=2\pi\int_0^1\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}dt=2\pi\int_0^1(5-t^2+12\sqrt{1-t^2})dt$$

$=2\pi\left[5t-\dfrac{t^3}{3}\right]_0^1+24\pi\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$、ここで（１）と同様にして$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$より

$$V_2=2\pi\left(5-\frac{1}{3}\right)+24\pi\times\frac{\pi}{4}=\frac{28}{3}\pi+6\pi^2$$

※この問題は空間把握が出来るかどうか、を見ているような気がする。（１）はノーマルな数学Ⅲの問題であるが、どのような断面図を考えればよいかが解法のポイントになる。円の方程式を$y=\sqrt{1-x^2}$と式変形して、それを基にして考えるが、中心からx軸方向にtだけ離れ、さらにx軸に垂直な平面で切り取った断面図を考えようとしない限り答えにはたどり着かない。さらに、（２）の回転体の予想図はドーナッツのような形なのであろうが、解法のところで述べたように、それが予想出来たとしても答えには結びつかない。ここでの注意は、くり抜かれる円の半径は軸から一番近いところであり、$\sqrt{2}$倍してはいけない、という点である。何故それに注意をするかと言えば、私が間違えたからである。さらに、その間違えは解き終わった後すぐには気付かない。コーヒーでも飲みながら再度チェックして初めて気付くところである。本番ではそんな余裕はないだろう。試験が終わって、家に帰って、次の日の朝、新聞等で答え合わせをして、初めて間違えに気付き唖然とする、という受験生泣かせの箇所だろう。

以上で九州大学の前期数学の解説は終わる。時間的余裕と精神的ゆとりがあれば全問正解出来そうな気がするが、本番では２時間半、１題約３０分で解かなければならない。悩んでいる暇はなさそうであるが、少なくとも［１］［４］［５］の３題はゲットしなければならないだろう。［３］はベクトルを苦にしない人に取っては、それほど難しい問題ではない。要するに［２］の（２）を悩まずに先に進むか、最初から飛ばそうとしない限り時間な余裕がなくなり、焦りが不注意なミスを誘ってしまうだろう。