２０２０年度　京都大学　数学（理）
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

京都大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに６題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、この解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

1　(30 点)

a, b は実数で，$a > 0$ とする．z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \qquad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a, b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ．

この問題を読んで、まず思い付くのは下の図１であろう。

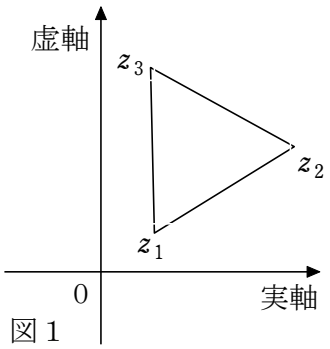


図１

$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_3-z_2|=\sqrt{3}a$

$arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{\pi}{3}$ などを思い出すが、その後、どうしようもなくなる。次に$z^3=1$ の解法も思い出すが、それと問題の方程式をどのように結びつけるのかが、見当も付かない。ここで思い出した内容に関する教科書の抜粋を以下に示す。

「数学Ⅲ」（数研出版）の抜粋

自然数 n と複素数 α に対して，$z^n=\alpha$ を満たす複素数 z を，α の **n 乗根** という。0 でない複素数 α の n 乗根は，n 個あることが知られている。複素数の極形式を用いて，まず 1 の n 乗根について考えよう。

例　　1の3乗根は，数学Ⅱで学んだように，3つの複素数 $z_0=1$，

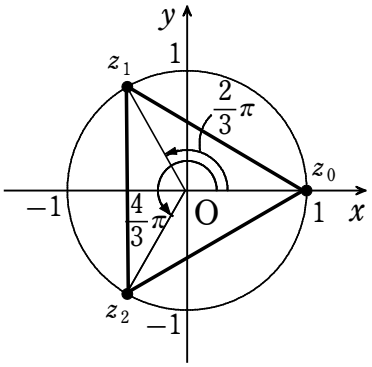
$z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ で，極形式で表すと

$z_0=\cos 0+i\sin 0$

$z_1=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$z_2=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

となる。よって，点 z_0，z_1，z_2 は，
点1が分点の1つとなるように，
単位円を3等分した各分点である。



終

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－［数学Ⅲ（数研出版）］からの抜粋－－

図1を上の図になるように平行移動をするのかな、と思うが、平行移動だけでは駄目で、回転も考えないといけない。その時点でまたまた闇の中に迷い込んでしまう。そのとき、ふっと、実係数の3次方程式には、少なくとも一つの実数解を持つ、というのを思い出した。そのとき、暗闇の中に一筋の光が現れた気分である。さらに、3つの解をz_1、z_2、z_3とおくと、解と係数の関係から$z_1+z_2+z_3=-3a$ となり、$\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}=-a$となる。これは、三角形の重心が実数$-a$ となるので、与えられた方程式を実軸方向にa だけ平行移動すると、下のどちらかの図になる。さらに、1辺の長さが$\sqrt{3}\,a$ なので、正三角形の1辺を底辺としたときの高さは$\dfrac{3}{2}a$ となる。

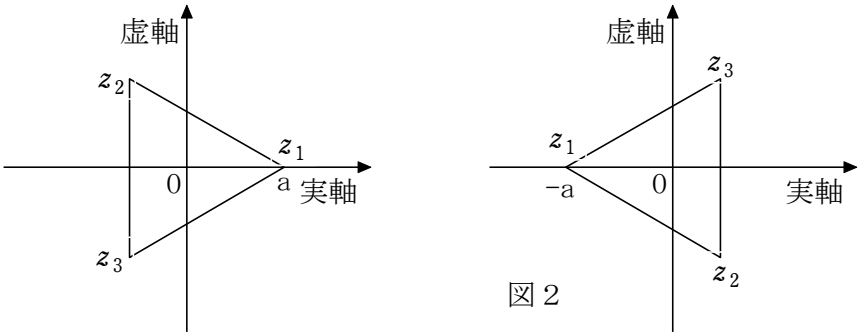


図2

また、$(z-a)^3+3a(z-a)^2+b(z-a)+1=0$……①の解に$z=a$ はなりえないので、①の解の図は、右の図2になる。これより①の解は

$z_1=-a$、$z_2=a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$、$z_3=a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ となる。

これより①に$z=-2a$を代入すると、$(-2a)^3+3a(-2a)^2+b(-2a)+1=0$

$4a^3-2ab+1=0$……②

次に $z=a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ を代入すると、$z-a=a\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)-a=-a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$より

$$-a^3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3+3a^3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-ab\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0$$

ここで、

$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$、$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

なので、$a^3+3a^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-ab\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0$となり、

$$-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}ab+1+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3-\frac{\sqrt{3}}{2}ab\right)i=0$$

$-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}ab+1$ と $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3-\frac{\sqrt{3}}{2}ab$は実数より

$-\frac{1}{2}a$
$$\begin{cases}-\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}ab+1=0\cdots\cdots③\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3-\frac{\sqrt{3}}{2}ab=0\cdots\cdots④\end{cases}$$

②－③×4 より　$6a^3-3=0$　a は実数より $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

② に代入すると、$b=3\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=3\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

下の図２を実軸に関して$-a$ だけ平行移動すると図３になる。

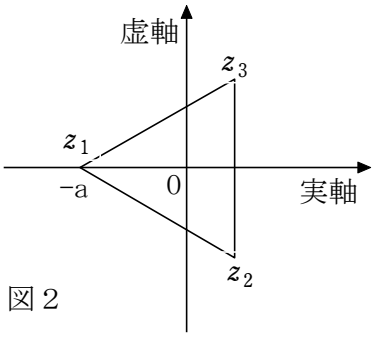


図２

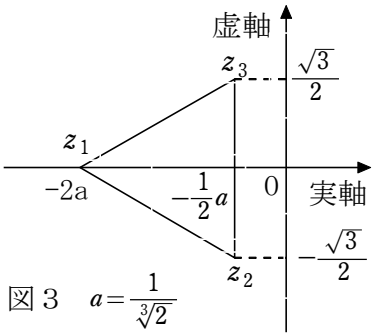


図３　$a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

これより３つの解は、$-\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$、$-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$、$-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

※この問題は京都大学らしさが出てるのでは、と思う。上記の解法が満点になるかどうかは分からない（途中、何故このような図になるのかの明確な説明を全て省いてしまった）が、解法を見つけたときは、何かを成し遂げたかのような高揚感がある。解き終わった後に楽しかったと思える問題が良問だとすれば、まさにこの問題は私にとっての良問だろう。

他の解き方はないかな、と考えるが、やはり実係数の3次方程式は少なくとも１つの実数解を持つ、ということを使わないと解けないと思う。しかし、ここではその証明も省略してしまった。これは整関数の話しなので、微分の分野で、実係数のn次方程式でnが奇数のときは少なくとも１個の実数解が存在する、という定理があってもよいと思うが、のような内容が教科書の本文としてあったかどうかも定かではない。

2 (30 点)

p を正の整数とする．α,β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ．

（1）すべての正の整数、という言葉から、これは数学的帰納法を使って証明するのだろう、とまず予想して答案を書き出す。

[Ⅰ] $n=1$ のとき、α、β は $x^2-2px-1=0$ の解なので、解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2p$ は偶数となり、成り立つ。

[Ⅱ] $n=k$ のとき、$\alpha^k+\beta^k$ が偶数、すなわち $\alpha^k+\beta^k=2m$、但し、m は整数と仮定する。

$n=k+1$ のとき、$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=(\alpha^k+\beta^k)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})$

また、解と係数の関係より $\alpha\beta=-1$ なので、

$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=(\alpha^k+\beta^k)(\alpha+\beta)+(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})$

ここで、筆が止まってしまった。この後、どうするのか……、$\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}$ も偶数と仮定するのかな、などと考えていたら、２段飛びの証明もありか、と次のような証明を思い付いた。

[Ⅰ] $n=1$ のとき、α、β は $x^2-2px-1=0$ の解なので、解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2p$ は偶数となり、命題は成り立つ。

$n=2$ のとき、$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2p)^2-2(-1)=2(2p^2+1)$、偶数となって、命題は成り立つ。

[Ⅱ] $n=k$ のとき、$\alpha^k+\beta^k$ が偶数、すなわち $\alpha^k+\beta^k=2m$、但し、m は整数

さらに、

$n=k+1$ のとき、$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ が偶数、すなわち $\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=2m'$、但し、$m'$ は整数と仮定する。

[Ⅲ] $n=k+2$ のとき、$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=\alpha\alpha^{k+1}+\beta\beta^{k+1}=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$

$=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)+(\alpha^k+\beta^k)$

$=2m'\cdot 2p+2m$

$=2(2m'p+m)$

これより偶数となって、命題は成り立つ。

以上より、すべての正の整数 n について命題は成り立つ。　　[終]

※$n=1$ と $n=2$ から $n=3$ が証明され、$n=2$ と $n=3$ から $n=4$ が証明され、……、というイメージであるが、どこか減点される箇所があるかも、と思いながら終わらせた。

（２）（１）の答えを使うんだろうな、と考えながら式を見る。

$\sin(\alpha^n\pi)$の箇所で使うならば$\alpha^n=2m-\beta^n$であり、$\sin(2m\pi-\beta^n\pi)=-\sin(\beta^n\pi)$となる。この式変形で、$\alpha^n+\beta^n$が偶数になる、という命題を使うので、多分、これを使うのではないだろうか、という匂いを感じる。では、$(-\alpha)^n$をどう考えるのだろうか。ここでnが偶数ならば$(-\alpha)^n=\alpha^n$、nが奇数ならば$(-\alpha)^n=-\alpha^n$という場合分けはあると思うが、どうもしっくりとこない。この場合分けだと、$\sin(2m\pi-\beta^n\pi)=-\sin(\beta^n\pi)$が使えなくなってしまいそうである。それでは、$(-\alpha)^n$をどのように変形すればよいのか。要するに$\alpha$を$\beta$で表せばいいんだ、と考えれば、解と係数の関係の$\alpha\beta=-1$を思い出される。つまり$-\alpha=\dfrac{1}{\beta}$である。この時点で、これだ、と確信する。これらをまとめると次のような答案になる。

（１）から、$\alpha^n+\beta^n=2m$、但し、mは整数とおくと、$-\alpha=\dfrac{1}{\beta}$から

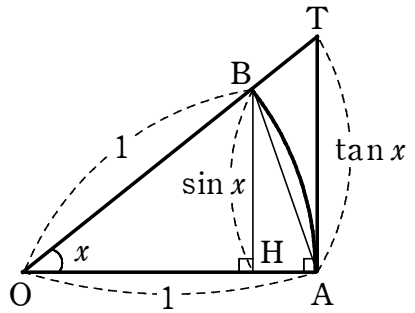
$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n\sin(2m\pi-\beta^n\pi)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n}\right)$$

また、$\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$、$|\alpha|>1$なので、$n\longrightarrow\infty$のとき、$\beta^n\longrightarrow 0$となる。

ここで、$\beta^n=\theta$とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\sin(\pi\theta)}{\theta}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(-\pi\cdot\frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}\right)\equiv-\pi$$

※ここでは、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$となる公式を使用しているが、この証明は、下図から、



$BH<\overset{\frown}{BA}<TA$となり、この関係と「はさみうちの原理」を使ってする。紙面が多少余ったのでここで証明すると、

[Ⅰ]$0<x<\dfrac{\pi}{2}$のとき

$BH<\overset{\frown}{BA}<TA$より$\sin x<x<\tan x$

辺々を$\sin x$で割ると$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

$x\longrightarrow+0$のとき、$\dfrac{1}{\cos x}\longrightarrow 1$になるので、はさみうちの原理より$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

[Ⅱ]$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$のとき

$x=-\theta$とおくと、上と同様にして$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\theta}{\sin\theta}=1$すなわち$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

以上から、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$すなわち$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$となる。　　（終）

3　　(35 点)

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X, Y に対して，$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY}$ は，$\overrightarrow{OX}$ と $\overrightarrow{OY}$ の内積を表す．

この問題を読んで、最初は図を描きながら解法を考えたが、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}$、さらに$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ということから、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$ なので、$\cos\angle AOB=\frac{1}{2}$ となり、$\angle AOB=60°$ になる。同様にして$\angle COD=60°$となって、下のような図 1 を考えてみた。

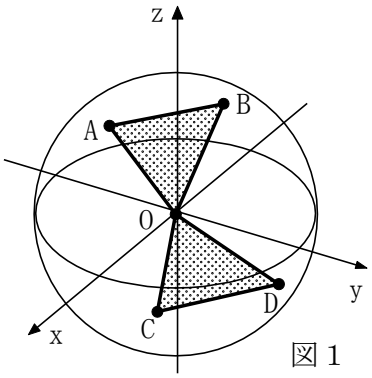


図 1

この図の中の△AOB と△COD は正三角形であり、$\angle AOC=\angle BOD$ である。また、内積の定義から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}|\cos\angle AOD=\cos\angle AOD$ なので、$\cos\angle AOD$の値を求められればよい。△AOD に着目して求めようかな、と思ったが、なかなかいい案が思い浮かばない。いろいろ考えてみたが、各点の成分は定まらないので、このような図を使っても限界があるな、と感じてくる。そこで、もしかしたら、位置ベクトルの考えで解けるかもしれない、と気付き、次のような答案を思い付いた。

4 点O、A、B、C が同一平面上にあったとすると、$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$となる実数$a$、$b$ が存在するが、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ から $a=b=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ となり、これは$|\overrightarrow{OC}|=1$ にはならないので、よって、4 点O、A、B、Cは同一平面上にない。

これより、$\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ となる実数x、y、z が存在する。

$|\overrightarrow{OD}|=1$ 、$|\overrightarrow{OD}|^2=1$ より

$$x^2|\overrightarrow{OA}|^2+y^2|\overrightarrow{OB}|^2+z^2|\overrightarrow{OC}|^2+2xy\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2yz\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2zx\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy\left(\frac{1}{2}\right)+2yz\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+2zx\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=1$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+2xy-\sqrt{6}\,yz-\sqrt{6}\,zx-2=0\cdots\cdots①$$

また、$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$より

$\overrightarrow{OC}\cdot(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}$、$x\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+z|\overrightarrow{OC}|^2=\frac{1}{2}$

$x\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+y\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+z=\frac{1}{2}$、これより $-\sqrt{6}x-\sqrt{6}y+4z-2=0$……②

また、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ より

$x|\overrightarrow{OA}|^2+y\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+y|\overrightarrow{OB}|^2+z\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$x+y\left(\frac{1}{2}\right)+z\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=x\left(\frac{1}{2}\right)+y+z\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$、これより $x=y$……③

③を①に代入してまとめると、$3y^2+z^2-\sqrt{6}yz-1=0$……④

③を②に代入してまとめると　$-\sqrt{6}y+2z-1=0$、これより $y=\frac{2z-1}{\sqrt{6}}$……⑤

⑤を④に代入してまとめると、$2z^2-2z-1=0$、これより $z=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

これを⑤に代入すると、$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

以上より $\overrightarrow{OD}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OA}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OB}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$ となり、

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{OA}|^2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\pm3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$

$k>0$なので、よって $k=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$

ここで、参考として「数学B」（数研出版）の抜粋を掲載する。

－－

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，次の形にただ1通りに表すことができる。

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$　　ただし s，t，u は実数

証明　$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ となる点Pをとる。3点O，A，Bの定める平面を α とし，Pから OC に平行な直線を引き，平面 α との交点をQとすると　$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$　…… ①

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから，平面 α 上で考えると，$\overrightarrow{OQ}=s\vec{a}+t\vec{b}$　(s，t は実数)

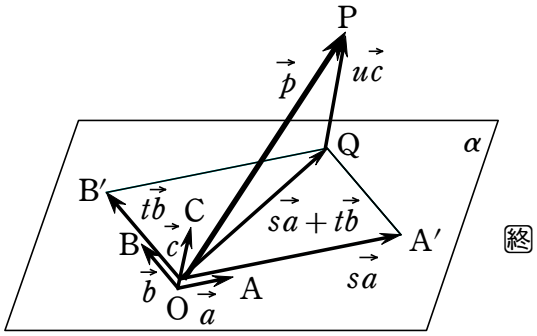
の形にただ1通りに表すことができる。また，$\overrightarrow{QP}/\!/\overrightarrow{OC}$ であるから $\overrightarrow{QP}=u\vec{c}$　(u は実数)

とただ1通りに表すことができる。

よって，① により，$\vec{p}$ は次の形に

ただ1通りに表すことができる。

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$　ただし s，t，u は実数　終



－－－－－－－「数学B」（数研出版）－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

4 (35 点)

正の整数 a に対して，

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．

m, n は整数で，次の条件を満たすとする．

(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない．

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ．

この問題を読んでまず確認するのは、$f(m,n)$ の値は限られていて、それが何通りあるか、ということだろう。m は30通りあり、１から30で3で割り切れる数は $\frac{30}{3} = 10$ 通りあるので n は $30-10=20$ 通りある。すなわち、$f(m,n)$ の値は $30 \times 20 = 600$ 通りある。それをシラミつぶしに検証するのはほぼ不可能である。それならば、具体的に数値を代入して問題の意味を理解してみよう、と思う。例えば、n の代表的な数値として４（３で割って１余る数）と５（３で割って２余る数）をまず代入してみると、

$f(m,4) = m^3 + 16 + 4 + 3 = m^3 + 23$ 、これが少なくとも３の倍数になる為には、m^3 が３で割って１余る数でなければならない。すなわち m が３で割って１余る数になるので、$m = 1,4,7,\cdots\cdots,28$ の10個となる。

次に $f(m,5) = m^3 + 25 + 5 + 3 = m^3 + 33$、これが少なくとも３の倍数になる為には、$m^3$ が３の倍数でなければならない。すなわち $m = 3,6,9,\cdots\cdots,30$ の10個となる。

以上から、最大20個の場合を調べ上げれば答えが出るのだろう、と思うが、それをもう少し賢くしようとしたのが、以下の答案である。

(i) $n = 3k+1\ (k = 0,1,2,\cdots,9)$ のとき

$f(m,n) = f(m,3k+1) = m^3 + (3k+1)^2 + (3k+1) + 3 = 3(3k^2 + 3k + 1) + m^3 + 2 \cdots\cdots①$

(a) $m = 3m'+1\ (m' = 0,1,2,\cdots,9)$ のとき

$$f(m,n) = f(3m'+1, 3k+1) = 3(3k^2+3k+1) + (3m'+1)^3 + 2$$
$$= 3(3k^2 + 3k + 9m'^2 + 3m' + 2)$$

これより $A(m,n) = B(f(m,n)) = 1$

(b) $m=3m'+2\ (m'=0,1,2,\cdots,9)$ のとき

$m^3+2=(3m'+2)^3+2=3i+1$、但し i は整数 となるので、

①より $f(m,n)=3(3k^2+3k+1+i)+1$ となる。これより、$A(m,n)=B(f(m,n))=0$

(c) $m=3m'\ (m'=1,2,3,\cdots,10)$ のとき

$m^3+2=(3m')^3+2=27m'^3+2$ ①より $f(m,n)=3(3k^2+3k+1+9m'^3)+2$ となる。

これより、$A(m,n)=B(f(m,n))=0$

(ⅱ) $n=3k+2\ (k=0,1,2,\cdots,9)$ のとき

$f(m,n)=f(m,3k+2)=m^3+(3k+2)^2+(3k+2)+3=3(3k^2+5k+3)+m^3\cdots\cdots②$

ここでm が３で割り切れない場合は、$A(m,n)=B(f(m,n))=0$ となるので、

以下m が３で割り切れる場合だけを考える。

すなわち$m=3m'$ 但し $m'=1,2,3,\cdots\cdots,10$ とおくと

②は、$f(m,n)=3(3k^2+5k+3+9m'^3)\cdots\cdots②'$ となる。

ここでk が３の倍数でなければ、$3k^2+5k+3+9m'^3$ は３の倍数にはならないので、

$A(m,n)=B(f(m,n))=1$ となる。

以下、k が３の倍数のときを考える。

(a) $k=3$ のとき

$f(m,n)=3(45+9m'^3)=27(5+m'^3)$　ここで、$5+m'^3$が３の倍数になるには、

$m'=1,4,7,10$ のときである。

○ $m'=1$のとき、$f(m,n)=3^4\cdot 2$ となり　$A(m,n)=B(f(m,n))=4$

○ $m'=4$のとき、$f(m,n)=3^4\cdot 23$ となり　$A(m,n)=B(f(m,n))=4$

○ $m'=7$のとき、$f(m,n)=3^4\cdot 116$ となり　$A(m,n)=B(f(m,n))=4$

○ $m'=10$のとき、$f(m,n)=3^4\cdot 335$ となり　$A(m,n)=B(f(m,n))=4$

(b) $k=6$ のとき

$f(m,n)=3(141+9m'^3)=9(3m'^3+3\cdot 15+2)$ なので、$A(m,n)=B(f(m,n))=2$

(c) $k=9$ のとき

$f(m,n)=3(291+9m'^3)=9(3m'^3+3\cdot 32+1)$ なので、$A(m,n)=B(f(m,n))=2$

以上より、$A(m,n)=B(f(m,n))$の最大値は４となる。

また、そのときの (m,n) は $k=3$ のときなので、$n=11$ 。

○ $m'=1$ のとき、$m=3$　　○ $m'=4$ のとき、$m=12$

○ $m'=7$ のとき、$m=21$　　○ $m'=10$ のとき、$m=30$

すなわち　$(m,n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11)$のとき、最大値は４

※以上が私が考えた解法であるが、もっと面白い解き方があるかもしれないな、と思う。解き終わっても達成感もなく、全て網羅しているかどうかのチェックをするだけである。そこで、Pythonを使って、しらみつぶしに調べてみる。３００件を手作業ならばかなりの時間を要するが、コンピュータなら１秒も掛からず調べてしまう。以下が、プログラム

の実行結果で、横軸がnの値，縦軸がmの値である。

表の中の数字は、$f(m,n)=m^3+n^2+n+3$を計算し、それを素因数分解して、3^aとなるaの値、すなわち$A(m,n)$の値である。

	01	02	04	05	07	08	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25	26	28	29
01	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03	0	2	0	1	0	1	0	④	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
04	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06	0	2	0	1	0	1	0	3	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
07	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
09	0	2	0	1	0	1	0	3	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	2	0	1	0	1	0	④	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
13	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	2	0	1	0	1	0	3	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
16	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	2	0	1	0	1	0	3	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
19	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	2	0	1	0	1	0	④	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
22	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	2	0	1	0	1	0	3	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
25	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	2	0	1	0	1	0	3	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2
28	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	2	0	1	0	1	0	④	0	1	0	1	0	2	0	1	0	1	0	2

但し、◯印は、プログラムの実行した後に、手動で付けた。

この表から、$(m,n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11)$のとき、最大値は４になる、ということが確認できる。このプログラムを以下に示す。今後、プログラムでしらみつぶ

しに調べる方法が多く活用されると思うが、その結果が正しいかどうかは、プログラムが正しいかどうか、つまり、全てのパターンを考慮に入れているかどうかの検証が大事になってくるだろう。その練習としても、EXCELLENTな高校生ならば、是非とも以下のプログラムを検証してほしい。

```
import sympy
ll=set(range(3,31,3))
mm=set(range(1,31))
nn=mm-ll
print("  ",end="")
for n in nn:
  print("{:0=2} ".format(n),end="")
print("")
for m in mm:
  print("{:0=2}  ".format(m),end="")
  for n in nn:
    f=m**3+n**2+n+3
    a=sympy.factorint(f)
    b=a.get(3,0)
    print("{0}  ".format(b),end="")
  print(" ")
```

・nn＝mm－llは、集合mm(1から30までの整数)から集合ll(3から30までの3の倍数)を除いた集合がnnとしてセットされる。

・sympy.factorint(f)は、fを素因数分解して、その結果をディクショナリ型で返す。
・a.get(3,0)は、ディクショナリ型aの中でKeyが３になるときの要素の値を返すが、Keyに３がなかったときは０を返す。

ここで余談であるが、私が学生時代（そろそろ半世紀前になるのかも……）、数学科の学生だったが、そのときに４色問題（平面上にあるどのような地図も、隣りどうしを異なる色にするだけならば、４色あれば十分である）がコンピュータによって解決された、という話題が持ち上がっていた。全ての考えられるパターンを認識して、４色で足りた、という結論をコンピュータが出した、というものである。そのときは、まだまだコンピュータは高根の花の存在であり、性能的にも今のゲーム機にも及ばないものであった。それが数学の難問を解決した、という話しを聞いて、私にとっては、これからの新しい時代の到来を感じさせる出来事であった。しかし、この証明が認められるまで、かなりの時間を要したようである。つまり、複雑なプログラムがほんとうに正しいのかどうか、さらにコンピュータのハード的な性能は大丈夫なのか、などの懸念から、実行結果は正しいのかどうか、という根本的なところにまで疑問が持たれたようである。その後、コンピュータの性能が飛躍的に高くなり、さらに新しいプログラムが開発され、４色問題は解決された、ということである。

さらにEXCELLENTな高校生へのこれからの問題としては、$P \neq NP$ なのか$P = NP$なのか、という問いである。これは、全ての問題がコンピュータでしらみつぶし法によって証明できるかどうか、という問題にもなっている。AI、ディープラーニングという新しい手法も登場しているが、果たしてどうなるのだろうか、非常に興味深い。

5

(35 点)

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

この問題を読んで、完全順列の話しなのかな、とまず思う。しかし、完全順列の公式なんて覚えていないし、漸化式から導くこともできるけど、と考えているうちに、この問題は４と同じように力ずくで解こうかな、という気になってくる。ということで以下の答案を思い付いた。

1、2、3、4 をa、b、c、d として、パターンを決めた後に数字を割り振ることとする。１行目を固定し、１列目だけを並べ替えたのを考えると、次の ６通りがある。

(ⅰ)

a	*b*	*c*	*d*
b			
c			
d			

(ⅱ)

a	*b*	*c*	*d*
b			
d			
c			

(ⅲ)

a	*b*	*c*	*d*
c			
b			
d			

(ⅳ)

a	*b*	*c*	*d*
c			
d			
b			

(ⅴ)

a	*b*	*c*	*d*
d			
b			
c			

(ⅵ)

a	*b*	*c*	*d*
d			
c			
b			

(ⅰ)のとき

a	*b*	*c*	*d*
b	*a*	*d*	*c*
c	*d*	*a*	*b*
d	*c*	*b*	*a*

a	*b*	*c*	*d*
b	*a*	*d*	*c*
c	*d*	*b*	*a*
d	*c*	*a*	*b*

a	*b*	*c*	*d*
b	*c*	*d*	*a*
c	*d*	*a*	*b*
d	*a*	*b*	*c*

a	*b*	*c*	*d*
b	*d*	*a*	*c*
c	*a*	*d*	*b*
d	*c*	*b*	*a*

表 1

表１の2行2列目は、a、c、d の３通り。このとき、2行3列、2行4列、3行2列、4行2列は自動的に決まる。2行2列目がa のときは、残りの行と列には２つの場合があるが、その他は自動的に決まるので、表１の４通りである。、

(ⅱ)のとき

a	b	c	d
b	a	d	c
d	c	a	b
c	d	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
d	c	b	a
c	d	a	b

a	b	c	d
b	c	d	a
d	a	b	c
c	d	a	b

a	b	c	d
b	d	a	c
c	c	b	a
d	a	d	b

表２

（ｉ）と同様にして、表２の４通りである。

(ⅲ)のとき

a	b	c	d
c	a	d	b
b	d	a	c
d	c	b	a

a	b	c	d
c	d	a	b
b	a	d	c
d	c	b	a

a	b	c	d
c	d	a	b
b	c	d	a
d	a	b	c

a	b	c	d
c	d	b	a
b	a	d	c
d	c	a	b

表３

（ｉ）と同様にして、表３の４通りである。

(ⅳ)のとき

a	b	c	d
c	a	d	b
d	c	b	a
b	d	a	c

a	b	c	d
c	d	a	b
d	a	b	c
b	c	d	a

a	b	c	d
c	d	a	b
d	c	b	a
b	a	d	c

a	b	c	d
c	d	b	a
d	c	a	b
b	a	d	c

表４

（ｉ）と同様にして、表４の４通りである。

（ｖ）のとき

a	b	c	d
d	a	b	c
b	c	d	a
c	d	a	b

a	b	c	d
d	c	a	b
b	a	d	c
c	d	b	a

a	b	c	d
d	c	b	a
b	d	a	c
c	a	d	b

a	b	c	d
d	c	b	a
b	a	d	c
c	d	a	b

表５

（ｉ）と同様にして、表５の４通りである。

(ⅵ)のとき

a	b	c	d
d	a	b	c
c	d	a	b
b	c	d	a

a	b	c	d
d	c	b	a
c	a	d	b
b	d	a	c

a	b	c	d
d	c	b	a
c	d	b	a
b	a	d	c

a	b	c	d
d	c	b	a
c	d	a	b
b	a	d	c

表６

（ｉ）と同様にして、表６の４通りである。

以上、（ｉ）～(ⅵ)より a、b、c、d によるマス目への入れ方は4×6＝24 通り。さらに、1、2、3、4 をa、b、c、d に振り分けるので、その場合の数は4!＝24 通りある、

よって、マス目への入れ方は、24×24＝576 通り。

※Python を使って上記の答え576 通りが正しいかどうかを検証してみることにする。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－プログラム－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

```
import itertools
a＝OKx＝[]
OKcnt＝0
OKflag＝True
for i in itertools.permutations([1,2,3,4]):
  a.append(i)
d＝c＝b＝a
for i1 in range(len(a)):
  for i2 in range(len(b)):
    for k in range(4):
      if a[i1][k]＝＝b[i2][k]:
        OKflag＝False
    if OKflag ＝＝ False:
      OKflag＝True
      continue
    for i3 in range(len(c)):
      for k in range(4):
        if a[i1][k]＝＝c[i3][k] or b[i2][k]＝＝c[i3][k]:
          OKflag＝False
          break
      if OKflag＝＝False:
        OKflag＝True
        continue
      for i4 in range(len(d)):
        for k in range(4):
          if a[i1][k]＝＝d[i4][k] or b[i2][k]＝＝d[i4][k] or c[i3][k]＝＝d[i4][k]:
            OKflag＝False
            break
        if OKflag＝＝False:
          OKflag＝True
          continue
        else:
          OKcnt ＋＝1
print(”同じ数字が１回しか現れない入れ方は{0}通りある。”.format(OKcnt))
```

要素1,2,3,4を24通りの順列をタプルとして作成し、それをリストに追加する

1行目a、2行目b、3行目c、4行目d

タプルの中の要素を一つ一つ取り出して、その各要素が同じかどうかを判断し、偽の場合はフラグにFalseを入れる

3行目cの処理

4行目dの処理

同じ数字が１回しか現れない入れ方は576通りある。 ← 出力結果

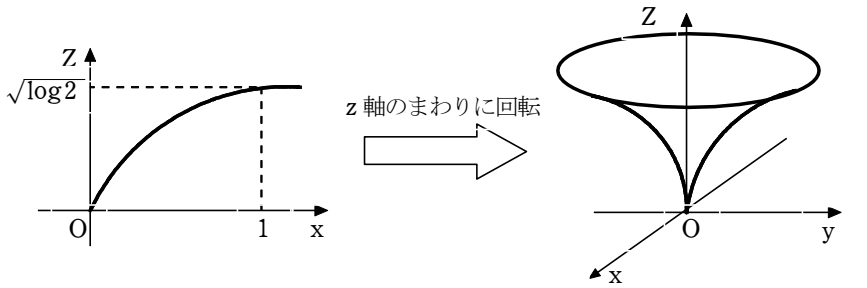
6 (35 点)

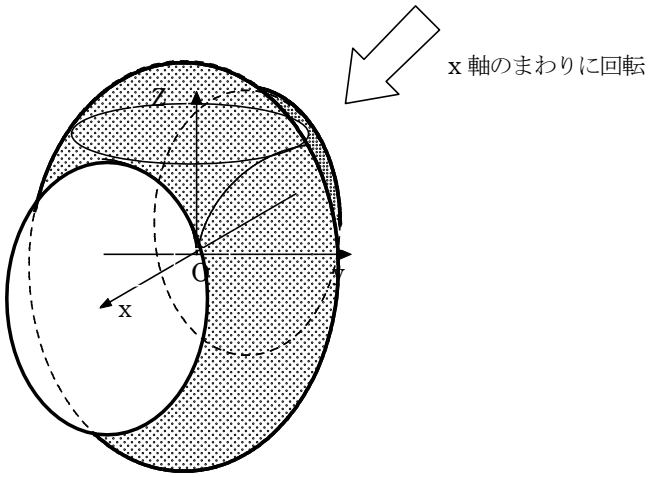
x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

微分･積分の問題、というのが一目瞭然であり、これから解く受験生も多いのでは、と思う。まず、$z=\sqrt{\log(1+x)}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の概形図を描いて、それを回転してみる。





この最後の回転体の図が難しい。回転体だから、回転軸に垂直に切断した図は円になるように思い描く。この図から、

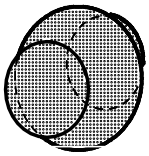
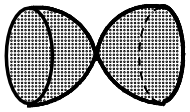

の体積から

の体積を引いたら、求める体積になる。

図1　　図2

まず簡単そうな図２の体積を求める。切り口の円の半径は図３の太線部分である。これより図２に体積を V_2 とおくと、$V_2=2\int_0^1 \pi\{\sqrt{\log(1+x)}\}^2 dx=2\pi\int_0^1 \log(1+x)\,dx$

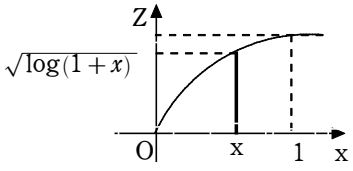


図3

$$V_2=2\pi\left\{[(1+x)\log(1+x)]_0^1-\int_0^1\frac{1+x}{1+x}dx\right\}=2\pi(2\log 2-1)$$

次に図１の体積を求める。この切り口も円であるが、その半径がどうなるかが問題である。このとき、切り口の半径を求めるために以下のような図を考えてみる。

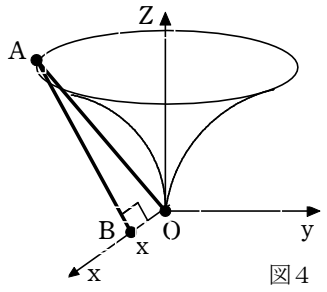


図４

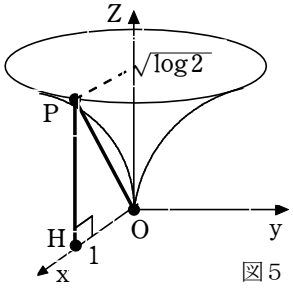


図５

切り口の円の半径は図４の線分ABの長さになる。これを求めるためにはまず線分AOの長さを求めなければならない。次に図５を考えて、線分AOの長さと線分POの長さは同じになるので、$AO=PO=\sqrt{1+\log 2}$となり、$AB=\sqrt{1+\log 2-x^2}$となる。

これより$V_1=2\int_0^1\pi\left\{\sqrt{1+\log 2-x^2}\right\}^2dx=2\pi\int_0^1(1+\log 2-x^2)dx$

$$=2\pi\left[(1+\log 2)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\pi\left(1+\log 2-\frac{1}{3}\right)=2\pi\left(\frac{2}{3}+\log 2\right)$$

以上より、求める体積$V=V_1-V_2=2\pi\left(\frac{2}{3}+\log 2\right)-2\pi(2\log 2-1)$

$$=\underline{\frac{10}{3}\pi-2\pi\log 2}$$

※回転体の代表的な問題である。数学Ⅲで微分･積分を一通り教えた後に応用問題として使うのに適した問題である。空間図形を把握し、さらに対数関数を部分積分で求める箇所もあり、復習に最も適した内容であろう。

これで２０２０年度　前期　京都大学の数学（理）の解説を終わる。この年度で数学として面白いと思った問題は１番であるが、自分としては５番がプログラミングの問題として最も興味深かった。でも、数学の問題としては果たしてどうなのだろうか。上に載せた解法ではなく、エレガントな解法があるのかもしれない、と思う。それがあれば、もしかしたら一番感動する問題なのかもしれない。完全順列の拡張版で漸化式を作って解く方法もありかな、と考えたけど、やっぱり上に載せた解法が一番早い、ということでそれで解いてみた。EXCELLENTな高校生のエレガントな解法を是非とも見てみたい。

面白い解法を見つけた人は、アマゾンに登録している私のメールアドレスまで送ってほしい。