２０２０年度 北海道大学　数学(理)
EXCELLNETな高校生のための入試問題解説

北海道大学の入試問題を実際にその場で解くことを想定して解説する。通常の解説本と何が違うのかと言えば、解法を見つけ出すまで、かなりの試行錯誤を繰り返すと思うが、その解答に至るまでの思考の過程を中心に解説している。さらに、Pythonシリーズとしての本なので、プログラムが出来る箇所はプログラミングを試みる。

難関大学の入試問題を解くとき、現役時代ならまるで神の啓示でもあったかのように解き方が見えてきたが、年齢を重ねるにつれてそのようなことはなくなってしまった。さらに６題を続けて考えきる知力･体力もなくなった。有名な解説本は、そのような啓示と知力･体力を持っている人が書いていると思われる。しかし、その解法はその場で思い付かないよな、というものも多く見受けられる。寧ろ、定年退職した著者の解説本の方が分かりやすいのではないか、と自画自賛しながら書いている。

$\boxed{1}$　三角形ＡＢＣについて

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=1、\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=2、\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形ABCの外接円の中心をOとし、直線AOと外接円とのA以外の交点をPとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$が成り立つような実数 s、t を求めよ。

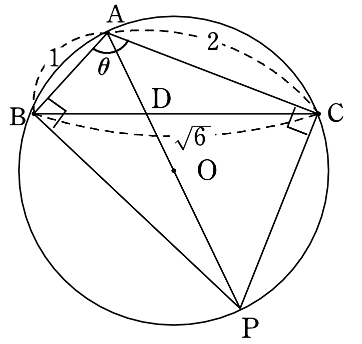
(3)　直線APと直線BCの交点をDとするとき、線分ADの長さを求めよ。

(1) は基本的な問題である。ベクトルの内積の定義と余弦定理を使えば解ける。この問題を解かせて受験生の緊張をほぐそうとする優しさが感じられる。

(1)の解法　$\angle BAC=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{1+4-6}{2\cdot1\cdot2}=-\frac{1}{4}$$

これより　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$



(2) はまず図に描いてみて、線分APが円の直径になり、その円周角である$\angle ABP$と$\angle ACP$が90°になることを気付けば解けるだろう。

(2)の解法　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$より$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0$、$s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=0$

ここで$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\dfrac{1}{2}$ より

$s+t\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=0$、$2s-t=2$……①

次に$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$より$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ なので、上と同様にして、$-s+8t=8$……② となる。

①と②を解くと、$s=\dfrac{8}{5}$、$t=\dfrac{6}{5}$

(3) は、点Dは直線APと直線BCの交点であると気付いて、点Dが直線AP上にある条件が$\overrightarrow{\mathrm{AD}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AP}}$であり、点Dが直線BC上にあるのは、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 、$s+t=1$ となる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学B（数研出版）の抜粋－－－－－－－

異なる2点を通る直線のベクトル方程式

異なる2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は

1　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

2　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　　ただし　$s+t=1$

－－－

(3)の解法　直線APと直線BCの交点がDなので、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=u\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となる実数u が存在する。

(2)より$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=u\left(\dfrac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{8}{5}u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{6}{5}u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる。

ここで、点Dは線分BC 上にあるので、$\dfrac{8}{5}u+\dfrac{6}{5}u=1$　これを解いて $u=\dfrac{5}{14}$

すなわち$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{5}{14}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$……③ となり、$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ は外接円の直径である。

ここで、外接円の半径Rとおくと、正弦定理より$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin\theta}=2R$

また、(1)より$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ なので、$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

これより$2R=\dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\sqrt{6}\times\dfrac{4}{\sqrt{15}}=\sqrt{6}\times\dfrac{4\sqrt{15}}{15}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

すなわち$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ なので、③に代入して $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{5}{14}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{5}=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

$\boxed{2}$　座標平面上の２点$\left(\dfrac{1}{16}, 0\right)$、$\left(0, \dfrac{1}{9}\right)$を通る直線$l$を考える。

(1)　l上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし、格子点とはその点のx座標とy座標がともに整数であるような点のことである。

(2)　l上の格子点のうち、原点との距離が最小となる点をAとする。また、l上のA以外の格子点のうち、原点との距離が最小となる点をBとする。さらに、Aのx座標とBのy座標をそれぞれx座標とy座標とする点をCとする。三角形ABCの内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

(1)は直線の方程式を求めた後は、１次不定方程式になる、ということを気付くことである。この問題は後でPythonを使って解いてみよう。

(1)の解法

２点$\left(\dfrac{1}{16}, 0\right)$、$\left(0, \dfrac{1}{9}\right)$を通る直線の方程式は、$\dfrac{x}{\frac{1}{16}}+\dfrac{y}{\frac{1}{9}}=1$、$16x+9y=1$

これより　題意は不定方程式$16x+9y=1$の整数解を求めることと同じである。

$16=1\times 9+7$……①

$9=1\times 7+2$……②

$7=3\times 2+1$……③

③より$7-3\times 2=1$

これに②より$2=9-1\times 7$を代入

$7-3\times(9-1\times 7)=1$

$7-3\times 9+3\times 7=1$

$4\times 7-3\times 9=1$

これに①より$7=16-1\times 9$を代入

$4\times(16-1\times 9)-3\times 9=1$

$4\times 16-4\times 9-3\times 9=1$

$4\times 16-7\times 9=1$

これより$16x+9y=1$の一つの解は$x=4$、$y=-7$となる。

$16\,x\;+9\;\;y\;\;=1$……④

$16\cdot 4+9\cdot(-7)=1$……⑤

④－⑤

$16(x-4)+9(y+7)=0$

$16(x-4)=-9(y+7)$

これより$x-4$は9の倍数になる。

$x-4=9k$、$x=9k+4$

さらに、$y=-16k-7$

但し、kは整数となる。

よって、格子点の座標は

$(9k+4, -16k-7)$　但しkは整数

(2)も後でPythonを使って解いてみる。

(2)の解法　(1)より直線l上の点を$P(9k+4, -16k-7)$とおく。

$OP^2=(9k+4)^2+(-16k-7)^2=337k^2+296k+65$

これより$k=-\dfrac{148}{337}$のとき、OPが最小になるので、この値に一番近い整数は

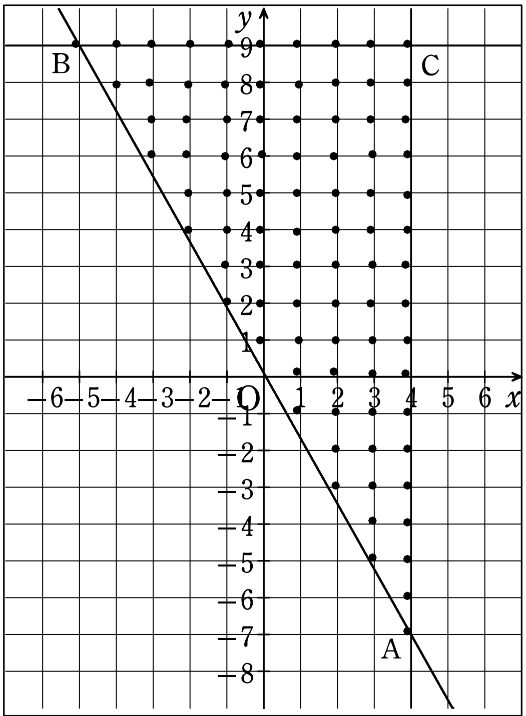
$k=0$のときである。これより　原点との距離が最小になる点$A(4, -7)$となる。

次に原点との距離が最小になるのは、$k=-1$のときであり、$B(-5, 9)$となる。

これらより、点$C(4, 9)$となる。
右図より
$1+2+4+6+8+9+11+13+15+17=86$
よって、86個

```
－－－－－－PYTHON－－－－－－－－－－
import numpy as np
ans1=[]
ans2=[]
min1=[]
min2=[]
r=range(-100,100)
for x in r:
   for y in r:
      if 16*x+9*y==1:
         ans1.append(x*x+y*y)
         ans2.append([x,y])
min1=ans2[ans1.index(np.min(ans1))]
ans2.pop(ans1.index(np.min(ans1)))
ans1.pop(ans1.index(np.min(ans1)))
min2=ans2[ans1.index(np.min(ans1))]
print(min1)
print(min2)
－－－－－－出力結果－－－－－－－－－－－
[4, -7]
[-5, 9]
```

この図は基本的に手作業で作成した。



左のプログラムは、不定方程式$16x+9y=1$　但し、(x, y)は整数 を解いている。範囲としては−100から100までの整数を考え、その中でこの方程式を満たす整数(x, y)を求め、その２乗の和x^2+y^2の値をans1リストに、(x, y)の値をans2リストにアペンドしている。x^2+y^2が最小の値になる要素のインデックスを使って、(x, y)の値を求め、それを削除した後、同様にして２番目に最小になる値を求めている。

```
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－PYTHON－－－－－－－－－－－－－－－－
import numpy as np
ans1=[]
for x in range(-5,4+1):
   for y in range(-7,9+1):
      if 16*x+9*y>=1:
         ans1.append([x,y])
#print(ans1)
print("個数は",len(ans1))
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－出力結果－－－－－－－－－－－－－－－－－－
個数は 86
```

このプログラムは、上で求めた点$A(4, -7)$、$B(-5, 9)$の値を使って、辺BCを横、辺BAを縦とする長方形の中の整数値の中で、直線AB $16x+9y=1$の境界線上の点および上側にある点の座標をans1リストにアペンドし、最終的にはその個数のみを出力している。

$\boxed{3}$ n を２以上の自然数とする。１個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1,X_2,\cdots,X_n$ とする。

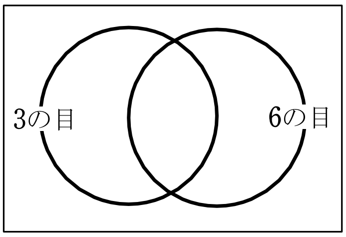
(1) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の最大公約数が３となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の最大公約数が１となる確率を n の式で表せ。

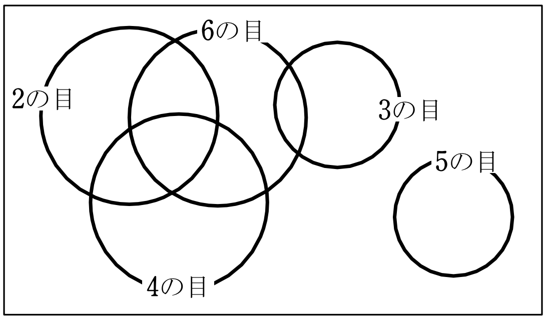
(3) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の最小公倍数が20となる確率を n の式で表せ。

この問題は集合の考え方を使うが、n 回投げたときのさいころの目のパターンを考えないといけないのが、普通の集合の問題とは違う。

(1)の問題は



(2)の問題は



(1)の解法　３または６の目が出て、全て６の目を除くのが、最大公約数が３となる。

よって、$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$

(2)の解法　余事象である最大公約数が１にならないのを考える。それは、出た目が２または４または６のときか、３または６のときか、全て５のとき、である。この場合、全ての目が６になるのがダブっているので、それを１回だけ引く。

よって、$1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$

(3)の解法　$20=4\times5$ なので、4と5の目は少なくとも１つはあり、3、6の目はない、というのが最小公倍数が20になる事象である。

すなわち、1または2または4または5 の目が出て、その中から、1または2または4 だけと1または2または５だけを除くが、そのとき1または2だけの目を２回引いてしまうので、１回は元に戻す。

よって、$\left(\frac{4}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n=\frac{4^n-2\cdot3^n+2^n}{6^n}$

$\boxed{4}$ α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とし、$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$a_1=\alpha$、$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ で定義されるとき、次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して、$0<a_n<1$ かつ $a_{n+1}>a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ とおくとき、すべての自然数 n に対して、$b_{n+1}<b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

(1) の解法　$0<a_n<1$ となることを数学的帰納法によって証明する。

［1］$n=1$ のとき　α を $0<\alpha<1$、さらに $a_1=\alpha$ より　$0<a_1<1$ が成り立つ。

［2］$n=k$ のとき　$0<a_k<1$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}=f(a_k)=\sin\dfrac{\pi a_k}{2}$　ここで、$0<\dfrac{\pi a_n}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$0<\sin\dfrac{\pi a_k}{2}<1$　よって $0<a_{k+1}<1$ が成り立つ。

以上より　すべての自然数 n について $0<a_n<1$ は成り立つ。

次に、$a_{n+1}>a_n$ となることを証明する。

$g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}-x$ とおくと、　$g'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}-1$

ここで $g'(0)=\dfrac{\pi}{2}-1>0$、$g'(1)=-1<0$　さらに $0<x<1$ において $g'(x)$ は単調減少関数なので、$g'(\beta)=0$ 、$0<\beta<1$ となる β が存在する。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

この増減表より、$0<x<1$ のとき $g(x)>0$

すなわち　$0<x<1$ のとき $\sin\dfrac{\pi x}{2}>x$　ここで、$0<a_n<1$ なので、$\sin\dfrac{\pi a_n}{2}>a_n$

さらに $a_{n+1}=f(a_n)=\sin\dfrac{\pi a_n}{2}$ なので、$a_{n+1}>a_n$ となる。

(2)の解法　$h(x)=\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}$ とおく。$h'(x)=\dfrac{(1-x)\left(-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)-(-1)\left(1-\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)}{(1-x)^2}$

$$=\frac{\dfrac{\pi}{2}(x-1)\cos\dfrac{\pi x}{2}+1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$$

ここで　$s(x)=\dfrac{\pi}{2}(x-1)\cos\dfrac{\pi x}{2}+1-\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とおく。

$s'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{\pi^2}{4}(x-1)\sin\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\pi^2}{4}(1-x)\sin\dfrac{\pi x}{2}>0$

すなわち　$s(x)$ は単調増加関数　さらに $s(0)=1-\dfrac{\pi}{2}<0$ 、$s(1)=0$ なので

$0<x<1$ において　$s(x)<0$　これより $h(x)=\dfrac{s(x)}{1-x}$ は、$0<x<1$ において単調減少関数となる。よって、$a_{n+1}>a_n$ より　$h(a_{n+1})<h(a_n)$

$$\frac{1-\sin\dfrac{\pi a_{n+1}}{2}}{1-a_{n+1}}<\frac{1-\sin\dfrac{\pi a_{n+1}}{2}}{1-a_{n+1}}$$

$$b_{n+1}<b_n$$

(3)の解法　(2)より $b_{n+1}\cdot b_n\cdot b_{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot b_2<b_n\cdot b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot b_1$

ここで左辺$=b_{n+1}\cdot b_n\cdot b_{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot b_2=\dfrac{1-a_{n+2}}{1-a_{n+1}}\cdot\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}\cdot\dfrac{1-a_n}{1-a_{n-1}}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{1-a_3}{1-a_2}$

$$=\frac{1-a_{n+2}}{1-a_2}$$

右辺$=b_n\cdot b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot b_1<b_1\cdot b_1\cdot b_1\cdot\cdots\cdots\cdot b_1={b_1}^n$

よって　$\dfrac{1-a_{n+2}}{1-a_2}<{b_1}^n$　となる。

このとき ${b_1}^n=\left(\dfrac{1-a_2}{1-a_1}\right)^n$ なので、　$1-a_{n+2}<(1-a_2)\left(\dfrac{1-a_2}{1-a_1}\right)^n$

また、$0<a_n<1$ なので　$0<1-a_n<(1-a_2)\left(\dfrac{1-a_2}{1-a_1}\right)^{n-2}$……①

さらに、$a_2>a_1$ より　$1-a_2<1-a_1$ より、$0<\dfrac{1-a_2}{1-a_1}<1$ なので、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_2)\left(\frac{1-a_2}{1-a_1}\right)^{n-2}=0$ となる。①から、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

次に、$b_n<b_{n-1}<b_{n-2}<\cdots\cdots<b_1$ なので、$b_n<{b_1}^{n-1}$

さらに、$0<a_n<1$、$a_{n+1}>a_n$ なので、$0<\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}<1$

すなわち　$0<b_n<{b_1}^{n-1}<1$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}{b_1}^{n-1}=0$ なので、はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\boxed{5}$　a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0<f(x)<1、\qquad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt=ax$$

さらに、$f(0)=\dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=0$、$x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに、$\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ。

(1) の問題から、まず教科書における基本事項を確認する。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ⅱ（数研出版）からの抜粋－－－－－－－－－－

定積分と微分法

a が定数のとき，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は x の値を定めるとその値が定まるから，x の関数である。この関数の導関数を求めてみよう。

関数 $f(t)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とすると

$$F'(t)=f(t), \qquad \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

よって，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると，$F(a)$ は定数であるから

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)=f(x)$$

ゆえに，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の１つの不定積分で，次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad \text{ただし } a \text{ は定数}}$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－数学Ⅲ（数研出版）からの抜粋－－－－－－－－－－

例　微分方程式 $y'=4xy^2$ の解のうち，条件「$x=0$ のとき $y=-1$」を満たす関数を求めよ。

解　定数関数 $y=0$ は与えられた条件を満たさない。

$y\neq 0$ のとき，方程式を変形すると　$\dfrac{1}{y^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=4x$

両辺を x で積分すると　$\displaystyle\int\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int 4xdx$

よって　　$-\dfrac{1}{y}=2x^2+C$,　　C は任意の定数

ゆえに　　$y=-\dfrac{1}{2x^2+C}$

$x=0$ のとき $y=-1$ であるから　　$-1=-\dfrac{1}{C}$

よって　　$C=1$

したがって，求める関数は　　$y=-\dfrac{1}{2x^2+1}$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－抜粋　終わり－－－－－－－－－

(1)の解法　$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt=ax$の両辺を$x$で微分すると

$$\frac{f'(x)}{\{1-f(x)\}f(x)}=a$$

$$f'(x)=a\{1-f(x)\}f(x)\cdots\cdots①$$

ここで、$y=f(x)$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=a(1-y)y$

$$\int\frac{1}{(1-y)y}dy=\int a\,dx$$

$$\int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{y}\right)dy=\int a\,dx、$$

$$-\log|1-y|+\log|y|=ax+C$$　但し、Cは積分定数

$0<y<1$なので、$-\log(1-y)+\log y=ax+C$

$$\log\frac{y}{1-y}=ax+C$$

$$\frac{y}{1-y}=e^{ax+c}$$

$$\frac{y}{1-y}=e^{c}e^{ax}$$

ここで$f(0)=\dfrac{1}{3}$なので、$\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=e^{c}$となり、$e^{c}=\dfrac{1}{2}$

これより　$\dfrac{y}{1-y}=\dfrac{1}{2}e^{ax}$

$y+\dfrac{e^{ax}}{2}y=\dfrac{e^{ax}}{2}$ なので$y=\dfrac{e^{ax}}{2+e^{ax}}$

よって、$f(x)=\dfrac{e^{ax}}{2+e^{ax}}$

⑵の問題は、極限値をどのように求めるのか、頭を悩ました。高校の教科書には原則として載っていない（つまり学習指導要領の範囲外の）ロピタルの定理を使えば極限値が$\dfrac{1}{3}$になることはすぐに求められるが、それを使わずにどうするか、ということに悩んでしまった。一応ここでは使わない解法を載せた。しかし、もし本番でロピタルの定理を使って求めてしまったら、果たして大学の先生はどのような採点をするのだろうか。高校の入試問題において、仮に中学校の範疇で解いたら複雑な問題を、微分を使って簡単に解いた受験生がいた場合、自分は×にするだろうか、と考えてみる。私としては、×にするのは数学の教師として許せない行為だし、無条件で○にするには、本当にこの受験生は微分を知っているのだろうか、と訝ってしまう。いや、もしかして数学に関しては天才的な受験生なのかもしれない、などといろんな事を考えてしまう。最終的に、問題自体が不適切だったと判断し○にすると思う。

⑵の解法

$a>0$、$0<f(x)<1$と⑴の①より　$f'(x)>0$ すなわち$f(x)$ は単調増加関数となる。

$f(0)=\dfrac{1}{3}$、$f(1)=\dfrac{e^a}{2+e^a}$なので　$S(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ax}}{2+e^{ax}}dx$

ここで、$e^{ax}=t$ とおくと、$ae^{ax}dx=dt$、$e^{ax}dx=\dfrac{1}{a}dt$

x	$0\ \to 1$
t	$1\to e^a$

$$S(a)=\int_1^{e^a}\frac{1}{2+t}\cdot\frac{1}{a}dt=\left[\frac{1}{a}\log|2+t|\right]_1^{e^a}=\underline{\frac{1}{a}\log\frac{2+e^a}{3}}$$

$$\lim_{a\to+0}S(a)=\lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\log\frac{2+e^a}{3}=\lim_{a\to+0}\frac{\log(2+e^a)-\log 3}{a}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{\log(2+e^a)-\log(2+e^0)}{a}$$　ここで$g(x)=\log(2+e^x)$ とおくと

$$\lim_{a\to+0}\frac{\log(2+e^a)-\log(2+e^0)}{a}=g'(0)$$　$g'(x)=\dfrac{e^x}{2+e^x}$なので、$\underline{g'(0)=\dfrac{1}{3}}$

−−−−−−−−−−−−−−−−−PYTHON−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

```
import sympy
sympy.init_printing()
sympy.var('a,x')
y=sympy.Function('y')(x)
eq=sympy.Eq(sympy.diff(y,x),a*(1-y)*y)
sympy.dsolve(eq,ics={y.subs(x,0):1/3})
```

このプログラムは、sympy を使って、微分方程式$y'=a(1-y)y$ 、初期値$x=0$ のとき、$y=\dfrac{1}{3}$を解いている。非常にシンプルである。

上の⑴の答えの分子、分母をe^{ax}で割れば、プログラムの答えになる。

−−−−−−−−−−−−−−−−−出力結果−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$y(x)=\frac{1}{1+2.0e^{-ax}}$$